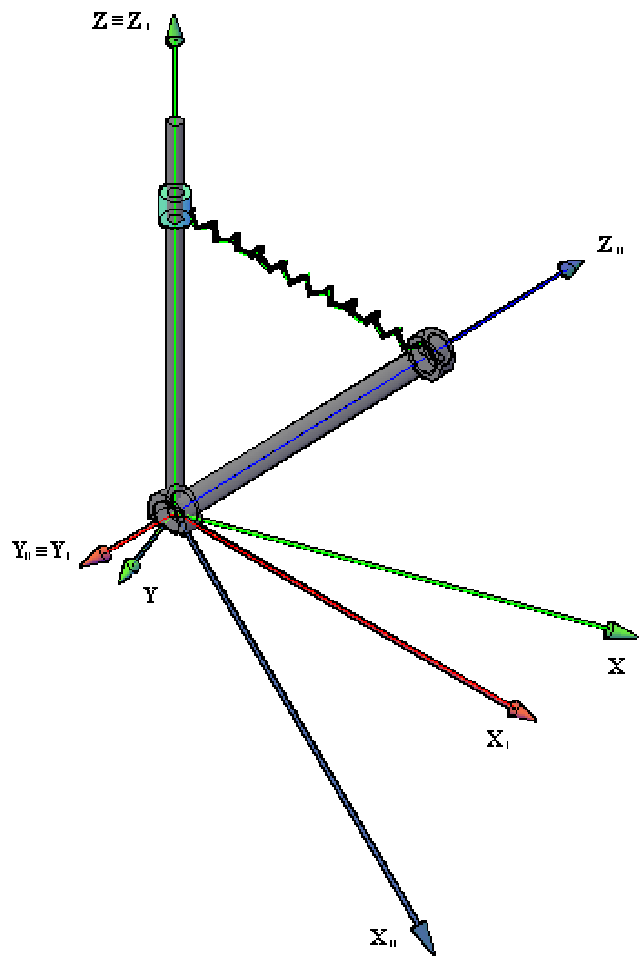
DINAMICA ANALITICA

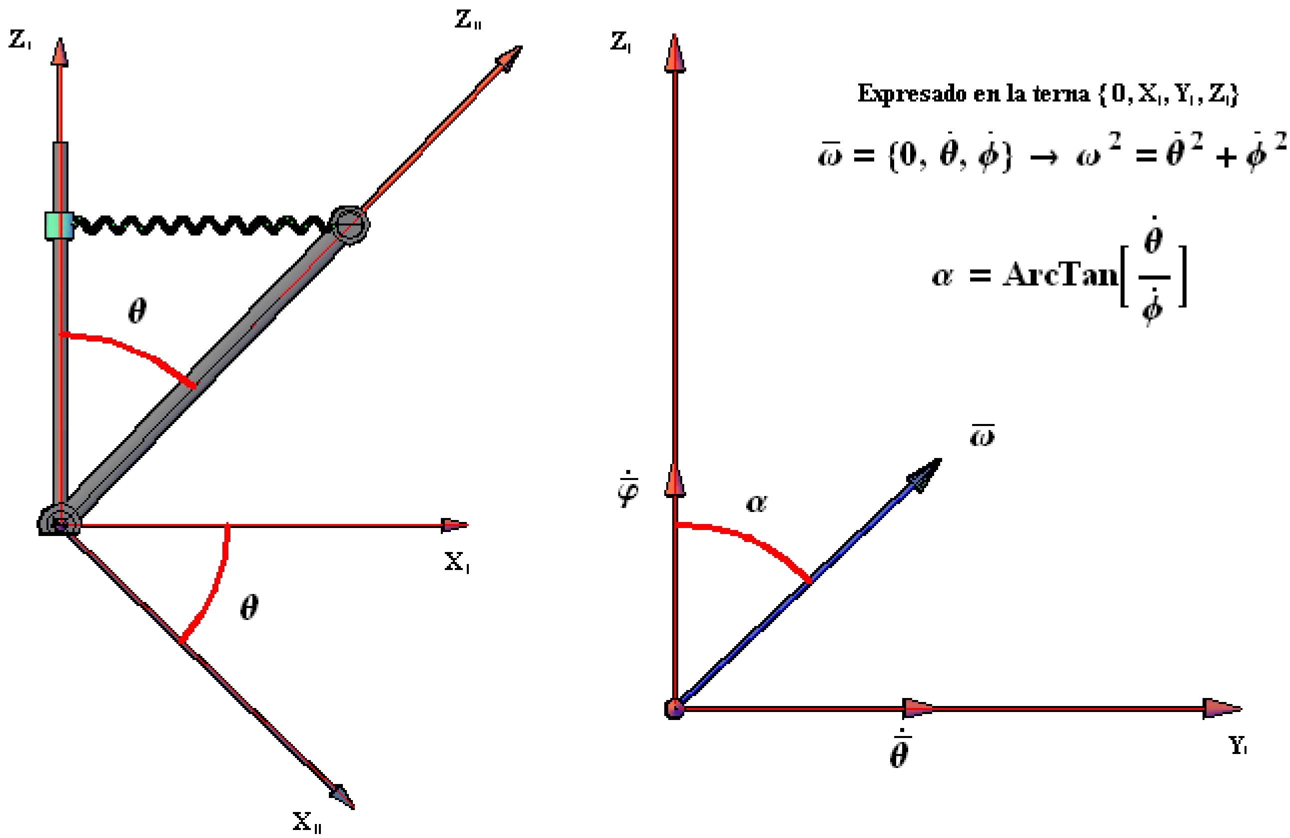
Breve Introducción:
El método de la dinámica analítica o de Lagrange presentado (Mécanique Analytique, París, 1788), constituye un punto de vista completamente diferente al de sus predecesores. Más que seguir el movimiento de cada masa individual de un sistema, Lagrange introdujo coordenadas generalizadas (qj) en igual cantidad que los grados de libertad del sistema (k). El método es aplicable a un gran conjunto de problemas de partículas y de cuerpos rígidos que abarca desde los más sencillos hasta los más complejos.
Está basado en gran parte en magnitudes escalares: energía cinética (e), energía potencial (p), trabajo virtual (dW), y en muchos casos, la función de potencia (P). Todas ellas pueden expresarse generalmente sin ninguna dificultad en cualquier sistema de coordenadas adecuado. Desde luego, la naturaleza vectorial de la fuerza, la velocidad, la aceleración, etc, debe tenerse en cuenta en el estudio de los problemas de dinámica. Sin embargo, las ecuaciones de Lagrange, basadas en las anteriores magnitudes escalares tienen en cuenta en forma completa y automática estas magnitudes vectoriales sin necesidad de recurrir a métodos vectoriales formales. Por complejo que sea un sistema, los términos de la ecuación del movimiento de Lagrange consisten en las componentes adecuadas de la fuerza y la aceleración expresadas en el sistema de coordenadas elegido.

Problema:

El mecanismo de la figura está formado por una varilla delgada OA (cuerpo rígido 2), de masa m y longitud L, y por un resorte de constante K y longitud natural nula. El extremo O de la varilla esta unido mediante una rotula al origen del sistema coordenado fijo {O, X , Y, Z}. El extremo A esta conectado mediante el resorte a su pasador C de masa despreciable que puede deslizar libremente y sin rozamiento por el eje vertical Z, del cual es perpendicular en todo momento el eje del resorte.
Considerando que todos los vínculos sean lisos, encontrar las ecuaciones diferenciales del movimiento.



Estudiaremos el movimiento colocando una terna {O, X_1 , Y_1, Z_1} coincidente en el origen y con el eje vertical Z de la terna fija pero que gira sobre este eje acompañando la barra. Además colocaremos una segunda terna {O, X_2, Y_2, Z_2} en la cual el eje Z_2 es coincidente con el eje de la barra.



Este es un caso en que las fuerzas actuantes son todas conservativas, dado que despreciamos el rozamiento. Entonces para poder encontrar las ecuaciones diferenciales del movimiento debemos aplicar, la formula de Lagrange para un sistema de puntos materiales sometidos a la acción de fuerzas conservativas, que es la siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_j}\right) = 0 \qquad \textbf{[2.1]}$$

Donde **L = e – p**, es decir, es igual a la energía cinética del sistema menos la energía potencial. Y las q_j son las coordenadas generalizadas del problema que en este caso serán dos porque el sistema tiene dos grados de libertad.

Lo primero que se debe hacer es determinar las energías, como sabemos la energía cinética de la barra viene dada por la siguiente expresión:

$$\mathbf{Ec} = \frac{1}{2} * \mathbf{I}\omega\omega * \omega^2$$

Debemos calcular cuanto vale el momento de inercia de la barra respecto al eje generado por ω, tal como se hizo en el ejercicio anterior:

Expresado en la Terna {0, $X_{\shortparallel}$, $Y_{\shortparallel}$, $Z_{\shortparallel}$}

$$\overline{\overline{I_{0}}}_{\shortparallel} = \frac{1}{3} * m * l^2 * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow I_{11} = I_{22} = \frac{1}{3} * m * l^2$$

$$C_{\omega x} = \mathrm{Cos}\left[\frac{\pi}{2} + \theta\right]$$

$$C_{\omega y} = \mathrm{Cos}\left[\frac{\pi}{2} - \alpha\right]$$

$$\textbf{Entonces, } I_{\omega\omega} = C_{\omega x}{}^2 * I_{11} + C_{\omega y}{}^2 * I_{22} = \frac{1}{3} * m * l^2 * \left(\left(\mathrm{Cos}\left[\frac{\pi}{2} + \theta\right]\right)^2 + \left(\mathrm{Cos}\left[\frac{\pi}{2} - \alpha\right]\right)^2\right)$$

Sabiendo esto calculamos la **energía cinética**:

$$\mathbf{Ec} = \frac{1}{6} m\, l^2 \left(\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos^2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right) * \left(\theta^2 + \phi^2\right)$$

Calcularemos ahora la **energía potencial**, que tenemos de dos tipos una debida a la aceleración de la gravedad y otra por la acción del resorte.

$$\mathbf{Ep}_{\mathbf{Peso}} = \frac{1}{2} m * g * l * \mathrm{Cos}[\theta]$$

$$\mathbf{Ep}_{\mathbf{Resorte}} = \frac{1}{2} * k * (l * \mathrm{Sin}[\theta])^2$$

Ahora que ya conocemos las energías estamos en condiciones de calcular L para luego si, aplicar las ecuaciones de Lagrange y obtener las ecuaciones diferenciales que buscamos.

$$L = e - p = \frac{1}{6} m\, l^2 \left(\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos^2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right) * \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\right) - \frac{1}{2} m * g * l * \mathrm{Cos}[\theta] - \frac{1}{2} * k * (l * \mathrm{Sin}[\theta])$$

Lo que se hará ahora es resolver la ecuación [2.1], con ayuda del Mathematica:

Calculamos las derivadas de las coordenadas generalizadas : $\partial L / \partial q'$

```
D[θ[t], t];
D[ϕ[t], t];
FullSimplify[D[L, D[θ[t], t]]];
FullSimplify[D[L, D[ϕ[t], t]]];
```

Calculo del Primer Termino : $\frac{\partial (\partial L / \partial q')}{\partial t}$

```
FullSimplify[D[D[L, D[θ[t], t]], t]]
FullSimplify[D[D[L, D[ϕ[t], t]], t]]
```

$$\frac{1}{6} l^2 m (2 \mathrm{Sin}[2 \theta[t]] \theta'[t]^2 - (-3 + \mathrm{Cos}[2 \theta[t]]) \theta''[t])$$

$$\frac{1}{3} l^2 m \mathrm{Sin}[\theta[t]] (2 \mathrm{Cos}[\theta[t]] \theta'[t] \phi'[t] + \mathrm{Sin}[\theta[t]] \phi''[t])$$

Calculo del Segundo Termino : $\partial L / \partial q$

```
FullSimplify[D[L, θ[t]]]
FullSimplify[D[L, ϕ[t]]]
```

$$\frac{1}{6} l \mathrm{Sin}[\theta[t]] (3 g m + 2 l \mathrm{Cos}[\theta[t]] (-3 k + m (\theta'[t]^2 + \phi'[t]^2)))$$

$$0$$

Y ordenando todo de nuevo se obtiene que:

SISTEMA DE ECUACIONES DE LAGRANGE :

$$\text{FullSimplify}\left[\frac{\partial \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \theta(t)}{\partial t}}}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial \theta(t)}\right]$$

$$\text{FullSimplify}\left[\frac{\partial \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \phi(t)}{\partial t}}}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial \phi(t)}\right]$$

Null

$$\frac{1}{6}\, l\, (-3\, g\, m\, \text{Sin}[\theta[t]] + l\, \text{Sin}[2\,\theta[t]]\, (3\, k + m\, \theta'[t]^2 - m\, \phi'[t]^2) + 3\, l\, m\, \theta''[t] - l\, m\, \text{Cos}[2\,\theta[t]]\, \theta''[t])$$

$$\frac{1}{3}\, l^2\, m\, \text{Sin}[\theta[t]]\, (2\, \text{Cos}[\theta[t]]\, \theta'[t]\, \phi'[t] + \text{Sin}[\theta[t]]\, \phi''[t])$$

Entonces las ecuaciones diferenciales que rigen el movimiento son:

$$\text{Ec. 1} = \frac{1}{6}\, l\left(-3\, g\, m\, \text{Sin}[\theta[t]] + l\, \text{Sin}[2\,\theta[t]]\left(3\, k + m\, \theta'[t]^2 - m\, \phi'[t]^2\right) + 3\, l\, m\, \theta''[t] - l\, m\, \text{Cos}[2\,\theta[t]]\, \theta''[t]\right) = 0$$

$$\text{Ec. 2} = \frac{1}{3}\, l^2\, m\, \text{Sin}[\theta[t]]\, (2\, \text{Cos}[\theta[t]]\, \theta'[t]\, \phi'[t] + \text{Sin}[\theta[t]]\, \phi''[t]) = 0$$

Lo que se hará ahora es resolverlas para poder graficar la trayectoria tridimensional de la barra, como son ecuaciones diferenciales muy complejas debemos recurrir a una solución numérica del problema mediante interpolaciones de las funciones solución. Se anexa a este trabajo la hoja de cálculo en Mathematica.

Software Utilizados:

- Microsoft Word 2003
- Mathematica 5.2
- Solid Edge V14 Academic
- AutoCad 2006 y 2007

Bibliografía:

- Monografía de la cátedra, Mecánica Racional, Prof. Ing. Liberto Ercoli, 2006.
- Dinámica, Mecánica para ingenieros; Merian J.L., Reverte.
- Mecánica Vectorial; Beer-Johnston.

Link para ver Solución:
www.frbb.utn.edu.ar/frbb/images/stories/frbb/materias/mecanicadelsolido/Solucion.pdf