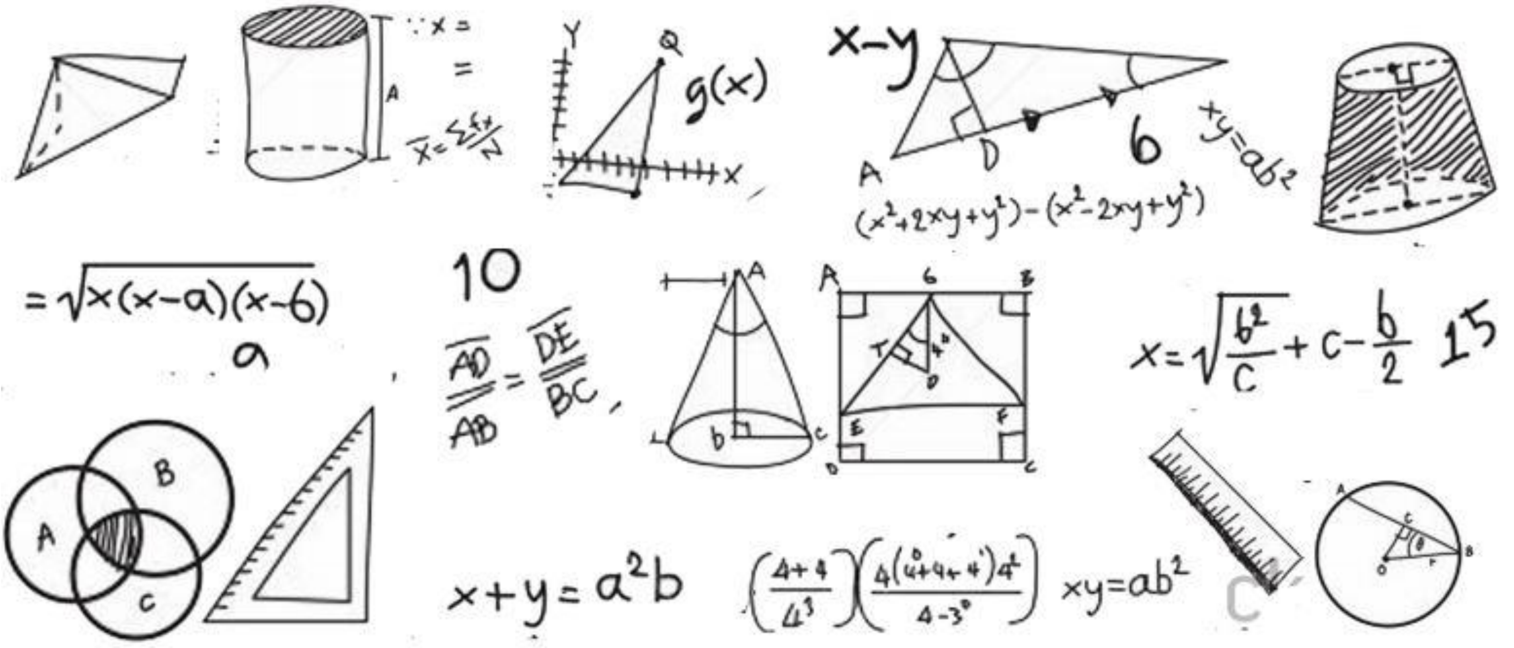
SEMINARIO DE INGRESO

MATEMÁTICA



utn bhi

UNIVERSIDAD TECNOLOGICA NACIONAL
Facultad Regional Bahía Blanca

Coordinadora del Seminario de Ingreso Matemática: ***Mg Alicia Hernández***

Autora del texto: ***Prof. Gloria N Suhit***

Diseño del material impreso: ***Sr. Martin De Lucca***

Supervisión del material impreso: ***Prof. Gloria N Suhit***
Mg. Mónica Garcia Zatti
Lic. Claudia Caruso
Mg. Marta Vidal
Prof. Antonela Risueño

Séptima edición: Agosto del 2018

ÍNDICE

MÓDULO II: FUNCIONES

MODULO III: TRIGONOMETRÍA

SIMBOLOGÍA DE APOYO

☞ EJEMPLOS

OBSERVÁ

RECORDÁ

DATO HISTÓRICO

✍ RESOLVÉ

☺ SABÍAS QUE

¿? RESPONDÉ

"Aceptar la realidad no significa resignarte a que las cosas sean como son: es el primer paso para que luego puedas decidir, inteligente y objetivamente, que conviene hacer y que puedes cambiar".

R. Trossero

¡¡¡HOLA !!!

¿Cómo estás? … Seguramente con muchas expectativas al iniciar esta primera etapa de tu formación profesional.

Te preguntarás: ¿Por qué MATEMÁTICA en el curso introductorio?

Porque la Matemática a través del tiempo se ha transformado en la base de sustentación de buena parte del desarrollo científico y tecnológico, alcanzando sus aplicaciones no sólo a la física y a la ingeniería sino también a la medicina, a la economía, a las ciencias sociales…

Luego si, como expresa el matemático español Miguel de Guzmán: "*el progreso cultural de la sociedad depende en gran parte de esta subcultura que es la matemática*" es importante, tanto para tu desarrollo profesional como para tu integración a la vida social que, desde el comienzo, incorpores algunas componentes de la capacidad matemática:

- *Utilices correctamente el lenguaje matemático.*
- *Comprendas la importancia de los conceptos y propiedades básicas relacionándolas en algún marco teórico.*
- *Incorpores estrategias para interpretar y resolver problemas.*
- *Desarrolles una actitud crítica frente a un problema o resultado.*

Esperamos que esta propuesta sea de utilidad para ordenar y resignificar los conceptos de Matemática, que has estudiado en la escuela media, necesarios como fundamento sólido para afrontar con éxito el cursado de las asignaturas básicas de la especialidad que elegiste.

Coincidiendo con el Dr. C. Alsina en que : "el aprendizaje es un viaje y no un destino, en el cual el profesor actúa de guía" deseamos acompañarte y compartir este viaje formando una sociedad de aprendizaje.

Este trabajo es un esfuerzo abierto a comentarios y rectificaciones. Cualquier sugerencia construtiva será considerada y en la medida de lo posible la incorporaremos a futuras actualizaciones del texto.

APRENDER CÓMO APRENDER

Orientaciones para estudiar Matemática

> *"El ingeniero del mundo que viene debe tener una gran capacidad de anticipación para desempeñarse en una sociedad que avanza a un ritmo superior al suyo propio"*
>
> *Ing. Marcelo Sobrevila, 1999*

Ante esta ***realidad*** será necesario que desarrollés nuevas ***habilidades*** que favorezcan tu integración a las formas de vida social que presentarán los nuevos tiempos.

Entre estas habilidades es fundamental que adquieras la capacidad de **APRENDER A APRENDER** para posibilitar una educación permanente.

Por estas razones queremos compartir algunas ideas que, a nuestro criterio, pueden ayudarte para **estudiar y aprender** , en particular, Matemática.

➢ Lo fundamental: **tratar de entender.**

Recordá el siguiente refrán :
"Oigo y olvido, veo y recuerdo, hago y entiendo"

¿ Cómo se hace? No hay un camino único, es personal, pero… ***entender*** significa hacerte preguntas, todas las necesarias hasta que las cosas tengan sentido, no reproduzcas lo que te enseñan.

➢ **Saber matemática es saber hacer cosas con lo que vas aprendiendo**

Para estudiar, debés repetir ejemplos, proponer variantes, desarrollar ejercicios, inventarte otros....

Saber hacer significa que adquirís la capacidad de: identificar, interpretar, comparar, relacionar, definir, explicar, inferir, fundamentar, resolver,…

Por eso cuando estudies debés tener constantemente tu lápiz en acción. Repetir ejemplos, desarrollar los ejercicios que te propongan, inventarte otros,….

➢ **Los diferentes objetos matemáticos son herramientas para hacer algo con ellos**

Aprendé a reconocer los objetos matemáticos, investigando para que sirven, como se usan.....

Es importante que reconozcas los diferentes objetos matemáticos (números, ecuaciones, inecuaciones, funciones). Investigá para qué sirven, cómo y para qué se utilizan, cómo se opera con ellos,….

Preguntá las veces que creas necesario.

Recordá que quién pregunta aprende.

Es un buen camino para entender, quien pregunta aprende. Pregunta todo, lo que no has entendido y también lo que te parece que entendiste para asegurarte que estás en lo correcto.

¿ Memoria? ¿ Si / no ? ¿ Para qué ?

No te será útil memorizar lo que no entendiste.

Observá con detenimiento los pasos que seguiste para desarrollar las demostraciones o al resolver los problemas.

No tratés de memorizar nada que no entendiste con total claridad. Observá con detenimiento los **pasos** que seguiste para desarrollar las demostraciones, resolver los problemas, los ejercicios, …esto es lo más importante para registrar en tu memoria, es decir, el proceso , el camino que recorriste para llegar a los resultados .

Tal vez te resultará útil aprender de memoria alguna que otra fórmula sencilla y de uso constante, como también escribir una lista con estas fórmulas para tenerlas a mano en el momento que sea necesario.

Revisá con frecuencia lo que vas aprendiendo

Para elaborar la información que te llega vas a necesitar de tiempo.

Tratá de organizar tu tiempo para desarrollar las actividades que se proponen en forma ordenada y no esperes los días previos a las evaluaciones.

Recordá que es necesario un tiempo para elaborar la información que te llega, el aprendizaje es un proceso, no se logra en forma inmediata.

Identificá los conceptos fundamentales del tema y buscá las posibles relaciones.

A partir de las relaciones que logres establecer entre los conceptos que vas aprendiendo éstos se van fijando en tus esquemas de conocimientos y de este modo los podrás usar en el momento que sea necesario.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

"Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero en la solución de todo problema, hay un cierto descubrimiento. El problema que se plantea puede ser modesto; pero, si se pone a prueba la curiosidad que induce a poner en juego las facultades inventivas, si se resuelve por propios medios, se puede experimentar el encanto del descubrimiento y el goce del triunfo"

George Polya . *"CÓMO PLANTEAR Y RESOLVER PROBLEMAS"*.

La actividad matemática consiste en gran medida en resolver problemas.

PERO … ¿QUÉ ES UN PROBLEMA?

Podemos acordar que:

Un problema es una situación matemática o extra matemática que:

- no siempre tiene solución inmediata o tal vez no tiene solución.
- puede admitir varias vías de aproximaciones y tal vez varias soluciones.
- puede demandar algún tiempo hallar su solución.
- exige esfuerzo mental, imaginación y creatividad.

Observá que todos los problemas poseen aspectos comunes, todos tienen un estado inicial y tienden a lograr algún objetivo.

Todos los problemas poseen aspectos comunes, todos tienen un estado inicial y tienden a lograr algún objetivo. Para resolverlos es preciso realizar algunas operaciones sobre el estado inicial para poder lograr el objetivo.

La resolución de problemas es un proceso a través del cual se combinan elementos del conocimiento, reglas, técnicas y conceptos previamente adquiridos para dar una solución a la nueva situación.

¿CÓMO SE RESUELVE UN PROBLEMA?

El proceso de resolución de problemas constituye una unidad, por tanto cualquier fraccionamiento del proceso es artificial. No obstante, a los efectos prácticos puede ayudarte considerar etapas en la resolución

A este tipo de estrategias pertenece el modelo propuesto por G. Polya, la resolución del problema dividido en cuatro fases.

Fase 1 **Comprender el problema**

- Identificar incógnitas, datos, condiciones.
- Dibujar una figura, adoptar una notación adecuada.
- Separar las diferentes partes de las condiciones.

Fase 2 **Idear un plan**

- Recordar un problema conocido que tenga el mismo tipo de incógnitas pero que sea más sencillo.
- Si no se puede resolver, intentar transformarlo en otro cuya solución resulte conocida.
- Simplificar el problema fijándose en casos especiales.
- Descomponer el problema en partes.

Fase 3 **Ejecutar el plan**

- Se debe verificar cada paso
- Es una etapa de deducción.

Fase 4 **Verificar el resultado**

- Tratar de resolver el problema de un modo diferente
- Verificar la solución

¿ CÓMO APLICAR ESTAS ESTRATEGIAS?

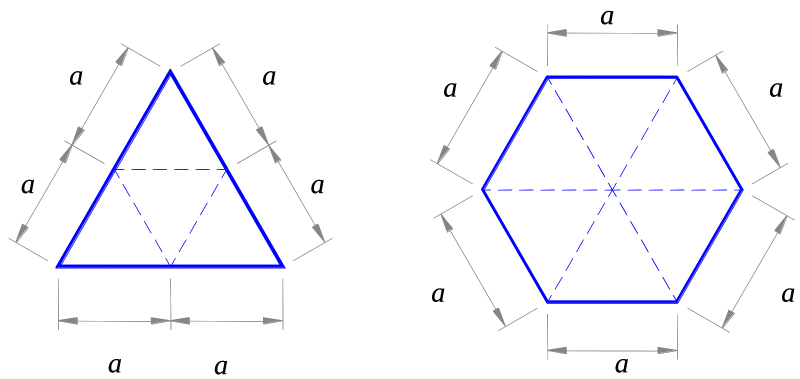
Con los siguientes ejemplos deseamos orientarte en tu camino de plantear y resolver problemas

EJEMPLO 1

Un triángulo equilátero de $4\ dm^2$ de superficie tiene el mismo perímetro que un hexágono regular¿ Cuál es la superficie del hexágono?

Solución

- Realizá un dibujo



En las condiciones dadas, tomando el triángulo equilátero de lado *a* como unidad de medida, podemos concluir que :

si $A_t = 4\ \text{dm}^2$ entonces $A_h = 6\ \text{dm}^2$

donde A_t Area del triángulo.

A_h Area del hexágono.

EJEMPLO 2

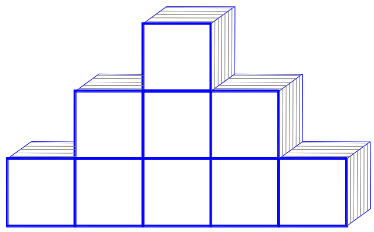
Para levantar la construcción de tres pisos se necesitan nueve bloques. ¿Cuántos bloques son necesarios para hacerlo de 9 pisos?

Solución

- Simplificá el problema e iniciá tu análisis por casos especiales :

  $n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ pisos
  En estos casos se necesitarán : 1, 4, 9, 16, …. bloques, respectivamente

- Buscá leyes generales
  En la serie anterior se observa que se necesitarán : n^2 bloques



EJEMPLO 3

Determiná el último dígito del número 3^{459}.

Solución

El número 3^{459} es muy grande para usar la calculadora, luego planteamos casos más sencillos(en este caso con la calculadora)

Número	Último dígito
3^1	**3**
3^2	**9**
3^3	**7**
3^4	**1**
3^5	**3**
3^6	**9**
3^7	**7**
3^8	**1**

Luego los últimos dígitos se dan en un ciclo de longitud 4. ¿Qué número corresponde al lugar 459?.Para ello, dividimos

$$\begin{array}{l|l} 459 & 4 \\ \cline{2-2} 059 & 114 \\ \ \ 19 & \\ \ \ \ \ 3 & \end{array}$$

como el resto es 3 , el último dígito es el tercer número del ciclo, es decir, 7

EJEMPLO 4

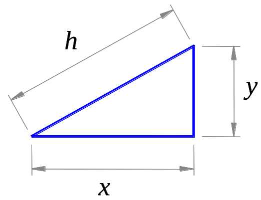
Expresá la hipotenusa de un triángulo rectángulo en términos de su área y su perímetro.

Solución

- Identificamos la cantidad desconocida y los datos

Incógnita	**Datos**
hipotenusa (h)	Perímetro (P) área (A)

- Dibujamos una figura. Observá que introducimos las variables x e y



- Aplicamos el teorema de Pitágoras : $h^2 = x^2 + y^2$ (1)

- Escribimos las ecuaciones del área y perímetro del triángulo

$A = \frac{1}{2}\, x\, y$ (2) $\qquad P = x + y + h$ (3)

- Relacionamos con algo familiar (cuadrado de un binomio)

$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2\, x\, y$

luego de (1) y (2) $\quad (x + y)^2 = h^2 + 4A$

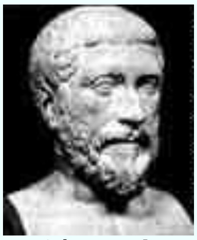
según (3) $\quad (x + y)^2 = (P - h)^2 = P^2 + h^2 - 2\, P h$

De las dos últimas ecuaciones : $h^2 + 4A = P^2 + h^2 - 2\, P h$

Simplificando $\quad 4A = P^2 - 2\, P h$

Entonces $h = \dfrac{P^2 - 4A}{2P}$

que es la relación solicitada.



Pitágoras de Samos. (569-475 a.C). Fundó en Crotona, al sur de Italia, una escuela donde se estudiaba música, aritmética, geometría y astronomía. Los pitagóricos formaron una sociedad secreta con ritos y reglas muy peculiares. No anotaban nada, y no debían revelar a nadie lo que aprendían del maestro.

Estaban convencidos de que *los principios de las matemáticas eran los fundamentos de todas las cosas.* Su lema era *todo es número*, refiriéndose con ello a los números enteros.

La contribución más extraordinaria de Pitágoras es el teorema que lleva su nombre: *en un triángulo rectángulo, el área del cuadrado sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados sobre los otros dos lados*

.

$c^2 = a^2 + b^2$

Para reflexionar

"Lo más importante no es el fin del camino sino el camino. Quien baja demasiado rápido se pierde la esencia del viaje"

Louis L ´Amour.

NOTACIÓN MATEMÁTICA

El propósito de este apartado es recordarte la notación matemática que utilizaremos en el desarrollo de los temas que componen este cuadernillo.

Teoría de conjuntos

Sea x un elemento, A y B conjuntos:

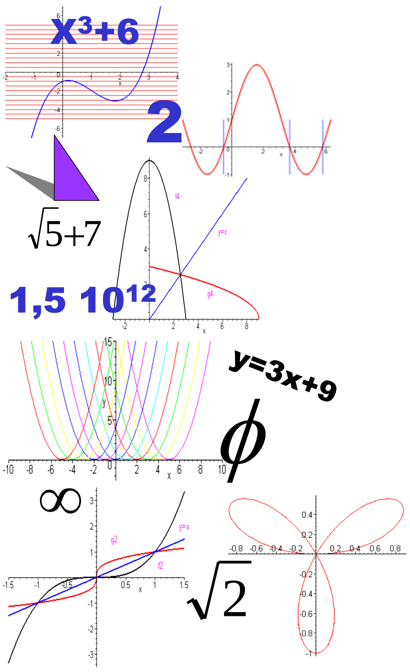
	Notación	**Se lee**
Pertenencia	$x \in A$	x pertenece a A
	$x \notin A$	x no pertenece a A.
Inclusión	$A \subset B$	A está incluido en B
	$A \subseteq B$	A está incluido o es igual a B
Unión	$A \cup B$	A unión B
Intersección	$A \cap B$	A intersección B

Expresiones

	Notación	**Se lee**
Igualdad	$x = y$	x es igual a y
Menor que	$x < y$	x es menor que y
Mayor que	$x > y$	x mayor que y
Aproximado	$x \approx y$	x es aproximadamente igual a y

	Notación	**Se lee**
Cuantificador universal	$\forall\ x$	Para todo x
Cuantificador existencial	$\exists\ x$	Existe x Existe por lo menos (un) x
Tal que	x / y x : y	x tal que y
Por lo tanto	$x \therefore y$	x por lo tanto y

CONTENIDOS DEL CURSO



MÓDULO I: NÚMERO REAL

- Conjuntos numéricos: N, Z, Q, I y R. Operaciones y propiedades en R. Identidades.
- El lenguaje algebraico. Ecuaciones e inecuaciones lineales con una incógnita.
- Intervalos de números reales.
- Valor absoluto de un número real. Caracterización del valor absoluto por medio de la noción de distancia.

MÓDULO II: FUNCIONES

- La función como modelo. Definición de función. Dominio e imagen. Distintas formas de representar una función. Gráfica de funciones de variable real. Características de las gráficas. Transformaciones de funciones.
- Función lineal. Ecuación de la recta : pendiente y ordenada al origen. Formas de ecuación de la recta. Rectas paralelas y perpendiculares. Funciones lineales por tramos.
- Funciones cuadráticas : gráficos, ceros , factorización. Relación entre función cuadrática y parábola de eje vertical.
- Funciones polinómicas. Gráficas de las funciones potenciales.
- Funciones especiales: función valor absoluto, función parte entera, función signo de “x”,…

MÓDULO III: TRIGONOMETRÍA

- Geometría. Resolución de problemas sobre cálculo de perímetro y área.
- Funciones trigonométricas de números reales: seno, coseno, tangente.... Valores de las funciones trigonométricas. Características de las gráficas de las funciones seno, coseno y tangente. Transformaciones.
- Funciones trigonométricas de ángulos. Sistemas de medición de ángulos.
- Razones trigonométricas.
- Teoremas del seno y del coseno.
- Resolución de triángulos rectángulos y oblicuángulos.
- Identidades fundamentales. Ecuaciones trigonométricas.

BIBLIOGRAFÍA

- Abdala, C., Real, M., Turano, C., *Carpeta de Matemática I*, Editorial Aique.
- Allendoerfer, y Oakley, ( ) *Fundamentos de Matemáticas Universitarias*, Ed Mc Graw-Hill.
- Altman, S., Comparatore, C., Kurzrok, L., (2002) *Matemática Polimodal, Funciones 1*, Editorial Longseller.
- Altman, S., Comparatore, C., Kurzrok, L., (2002) *Matemática Polimodal, Funciones 2*, Editorial Longseller.
- Antón, H., (1991) *Cálculo y Geometría Analítica*, Tomo I, Ed Limusa.
- Arroyo, D., Berio, A., (2003) *Matemática 3*, Editorial Puerto de Palos.
- Bers, L.,( ) *Cálculo diferencial e Integral*, Volumen I, Ed. Interamericana.
- Camuyrano, M., Net, G., Aragón, M., (2000) *Matemática I, Modelos matemáticos para interpretar la realidad*, Editorial Estrada.
- Carnelli, G., Novembre, A., Vilariño, A. (1999) *Función de gala. Dramáticas actividades para dominar las funciones matemáticas.* Setenta Soles Grupo Editor.
- De Simone; Turner, ( ) *Matemática 4º* , Editoria AZ
- De Simone; Turner, ( ) *Matemática 5º* , Editoria AZ
- Engler, A., Müller, D., Vrancken, S., Hecklein, M., (2005) *Funciones*, Universidad Nacional del Litoral.
- Grupo Eureka, (2002) *Aritmética y Álgebra*, Cuaderno 1, Editorial Bruño.
- Guzmán, M. de, Colera, J., (1989) *Matemáticas COU*, Editorial Anaya.
- Guzmán, M. de, Colera, J., Salvador, A., (1993) *Matemáticas Bachillerato 1*, Editorial Anaya.
- Guzmán, M. de, Colera, J., Salvador, A., (1993) *Matemáticas Bachillerato 2*, Editorial Anaya.
- Guzmán, M. de, Colera, J., Salvador, A., (1993) *Matemáticas Bachillerato 3*, Editorial Anaya.
- Gysin, L., Fernández, G., (1999) *Matemática una mirada funcional álgebra y geometría*, AZ Editora.
- Haussler, E., Richard, P., (1997) *Matemáticas para Administración, Economía. Ciencias Sociales y de la Vida*, Prentice – Hall.
- Iturrioz, L., *Análisis Matemático, Tomo II*, Othaz Editor.
- Kaczor, P., Schaposchnik, R., Franco, E., Cicala, R., Díaz, B., (1999) *Matemática I*, Santillana.
- Leithold, L., ( ) *Matemáticas previas al Cálculo*, Editorial Harla.
- Stewart, J., (2001) *Precálculo*, Editorial Thomson.

OBJETIVOS

Al finalizar el curso habrás desarrollado la capacidad de:

- Reconocer y utilizar los números reales, comprendiendo las propiedades que los definen y las formas alternativas de representación de sus elementos, seleccionándolas en función de la situación problemática a resolver.

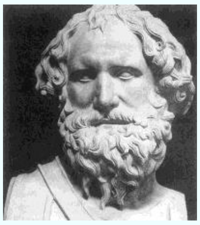
- Resolver problemas con ecuaciones e inecuaciones, de una incógnita, utilizando métodos analíticos y gráficos.

- Identificar, definir, graficar e interpretar distintos tipos de funciones asociándolas a situaciones numéricas, experimentales o geométricas.

- Reconocer el uso de las funciones para modelizar fenómenos del mundo real.

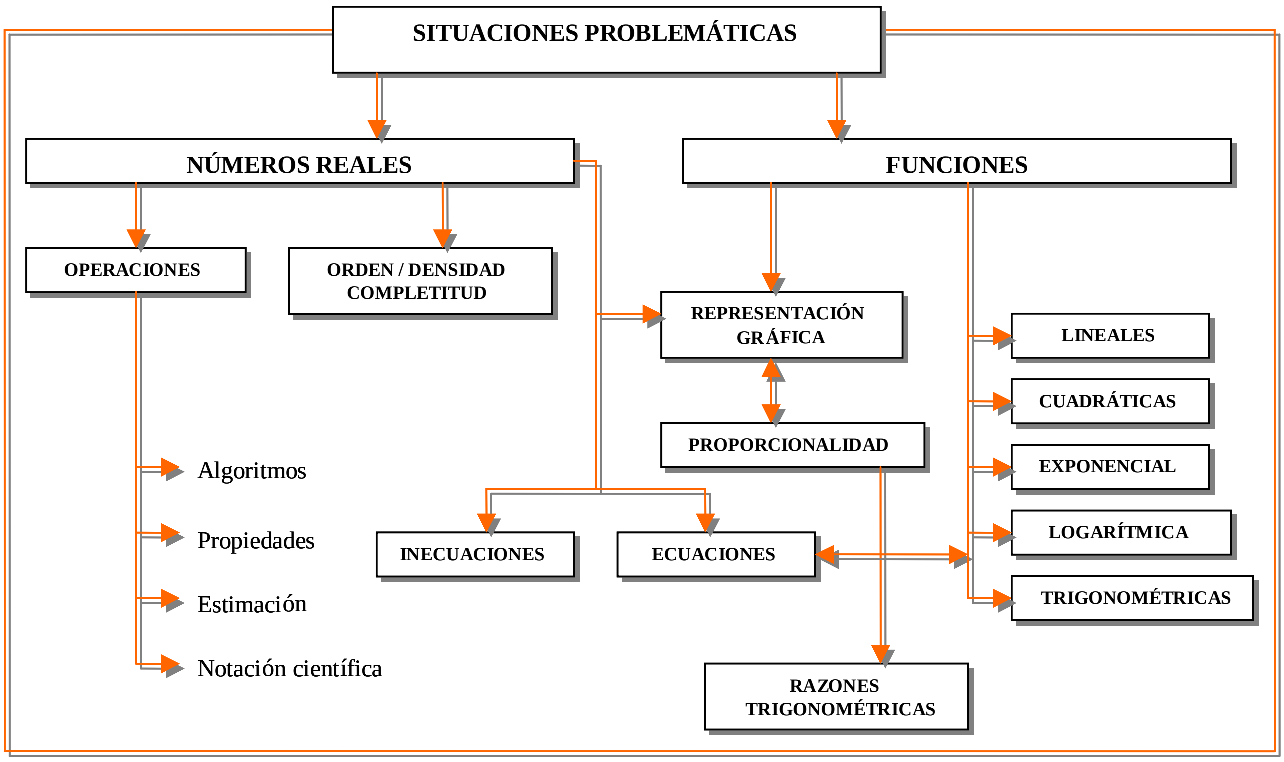
- Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados.

- Valorar el lenguaje matemático para modelizar situaciones de la vida diaria



Arquímedes (287-212 a. C.) fue el matemático más grande del mundo antiguo. Nació en Siracusa, colonia griega en Sicilia, una generación después de Euclides. Adquirió renombre como genio de la mecánica, por sus muchos inventos técnicos: diseñó poleas para levantar pesadas naves, y el tornillo para transportar agua a niveles más altos. Se dice que usó espejos parabólicos para concentrar los rayos del Sol e incendiar la flota romana que atacaba Siracusa. Una vez, el rey Herón II de Siracusa sospechó que un orfebre guardaba parte del oro destinado a su corona, y que lo reemplazaba con cantidades iguales de plata. Pidió consejo Arquímedes. A1 sumergirse en un baño público, Arquímedes descubrió la solución de ese problema, al observar- que el volumen de su cuerpo era igual al volumen del agua derramada de la tina. Dice la leyenda que de inmediato corrió a casa, gritando “Eureka! ,Eureka!" (“¡lo encontré! ¡lo encontré!"). Este incidente atestigua sus enormes poderes de concentración. A pesar de su destreza técnica, lo que más enorgulleció a Arquímedes fueron sus descubrimientos matemáticos. Entre ellos están las fórmulas del volúmen de una esfera, $V = \left(\frac{3}{4}\right)\pi r^3$, la superficie de una esfera, $S = 4\pi r^2$ y un cuidadoso análisis de las propiedades las parábolas y otras cónicas.

DIAGRAMA CONCEPTUAL GENERAL



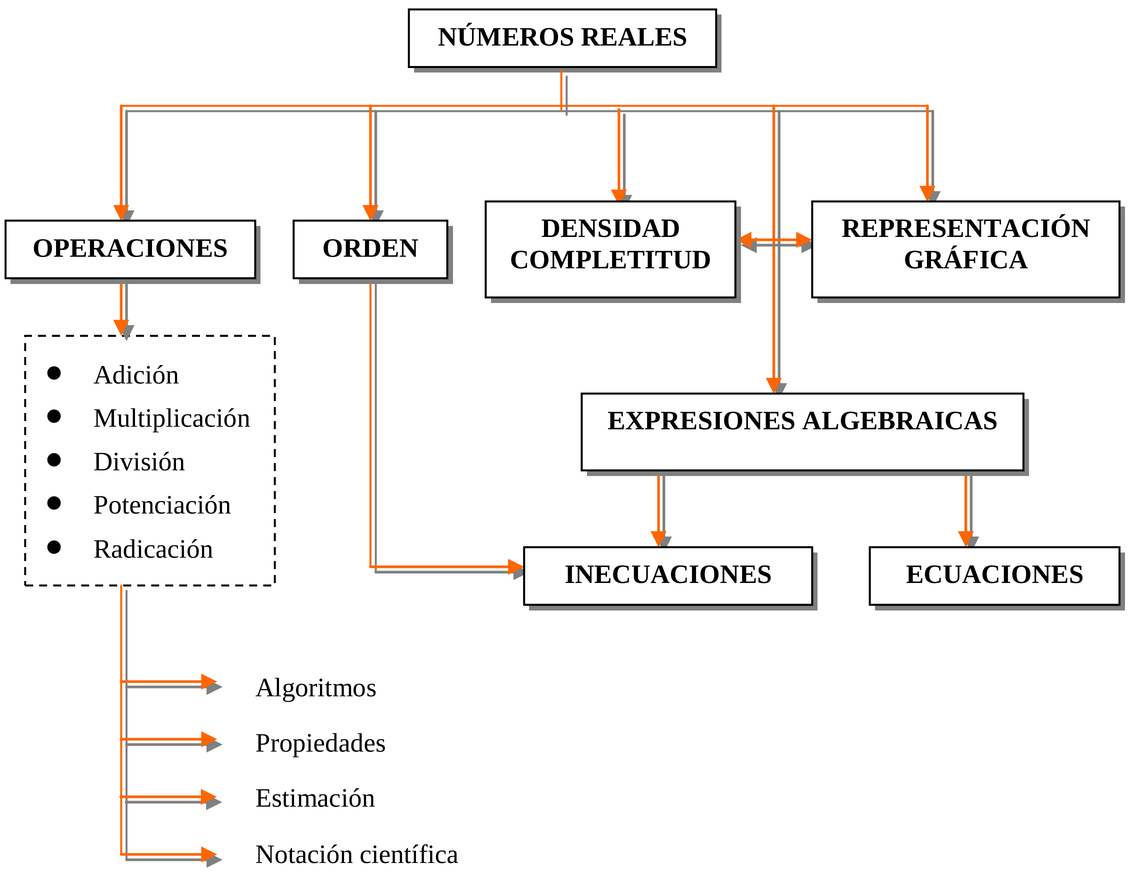
MÓDULO I: NÚMEROS REALES

OBJETIVOS

Al concluir el módulo I estarás en condiciones de:

- Identificar los distintos conjuntos numéricos.
- Distinguir y aplicar correctamente las propiedades.
- Operar con números reales.
- Formular conjeturas sobre situaciones y problemas numéricos.
- Resolver problemas con ecuaciones e inecuaciones de primer grado.

DIAGRAMA CONCEPTUAL



1.0.0 UN POCO DE HISTORIA

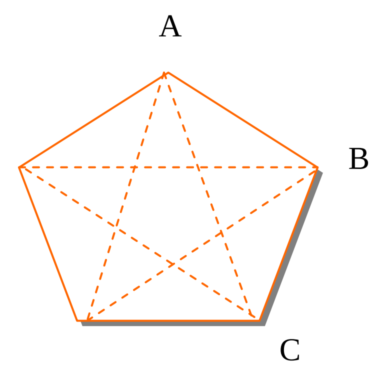
Hasta llegar al desarrollo actual de la idea de número el hombre necesitó muchos siglos de trabajo.

De las cuatro grandes civilizaciones del mundo occidental antiguo Babilonia, Egipto, Grecia y Roma, solamente dos mostraron una creatividad matemática notable: Babilonia y Grecia.

Los babilonios (2100 a.C.) poseían una organización administrativa muy compleja que se apoyó en el desarrollo de un sistema de numeración en base 60. Mediante él y gracias al valor posicional de los símbolos empleados, eran capaces de desarrollar con gran habilidad operaciones aritméticas complicadas.

En la aritmética egipcia, mucho más primitiva, el paso de una unidad a otra superior se indicaba no por la posición de las cifras sino mediante un nuevo símbolo.

Hacia el año 2000 a.C. los egipcios comienzan a manejar, con acierto, algunas ***fracciones*** sencillas, como: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, ...

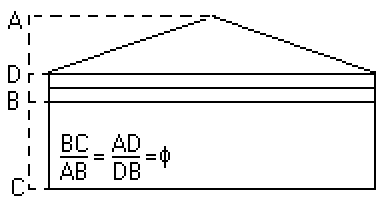


$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Los griegos, que elevaron las manipulaciones y recetas de los egipcios y babilonios a la categoría de ciencia, dieron el paso siguiente en el camino de los números.

En el siglo V a.C., los griegos pitagóricos descubrieron, con gran sorpresa que, además del natural y del fraccionario, existía otro tipo de número: el ***irracional***. Lo obtuvieron como relación entre la diagonal $\overline{AC}$ de un pentágono regular y su lado $\overline{AB}$.

Posteriormente consideraron que el rectángulo cuyos lados a y b están en la relación $\frac{a}{b} = \Phi$ era especialmente armonioso y lo llamaron rectángulo áureo (de oro), ya que la armonía era considerada una virtud especial.



Al número Φ lo llamaron número de oro. Esta proporción de medidas se ha usado con mucha frecuencia en el arte.

La consideración del número negativo surgió por la necesidad de dar solución a ecuaciones de la forma:

$$\boxed{\mathbf{x + a = b \quad con \quad b < a}}$$

La construcción del concepto de número negativo llevó mucho más tiempo en el mundo occidental que en el oriental, pues los chinos lo habían resuelto veinte siglos antes.

x+8=3 x=3-8 x=-5

Aún a mediados del siglo XVII Descartes llamó falsas a las raíces negativas de una ecuación algebraica.

Es a partir del siglo XVII y con el desarrollo de la Geometría Analítica que se les da un sentido espacial: los negativos, en geometría, indican retroceso, los positivos un avance y de este modo se va incorporando el concepto de número negativo.

1.1.0 INICIANDO EL CAMINO

> El resultado de una medición <u>no</u> es siempre un número entero, por eso para expresar medidas se requiere un tipo de números que admitan *"partes de la unidad"*: los números <u>racionales</u> (el volumen del aire es de: 35,4 dm³; tiene una temperatura de 37,2 ºc,....)
>
> Los números además de expresar cantidades y medidas sirven también para operar con ellas, es decir, calcular ciertas cantidades a partir de otras conocidas

En el desarrollo del modulo encontrarás información que seguramente ya conocés. Así, por ejemplo, haz utilizado los números para:

- **Contar** (los días que faltan para un examen, los asistentes a un espectáculo, los cerámicos de un piso,....)
-
- **Ordenar** los elementos de un conjunto (la tierra es el tercer planeta según su distancia al sol, Juan es el quinto de la lista,....)
- **Medir** distintas magnitudes (longitud de un segmento, temperatura del agua,...)

SITUACIÓN POBLEMÁTICA

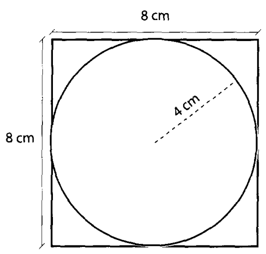
Un productor debe transportar latas de tomate, de forma cilíndrica de 4 cm de radio y 8,5 cm de altura y desea realizar el envío empacando las latas en cajas. En el mercado existen dos tipos de cajas de base rectangular

Cajas	Ancho (cm)	Largo (cm)	Alto (cm)
Tipo A	40	32	9
Tipo B	56	22	10

¿ Cuántas latas pueden ubicarse en cada tipo de caja?

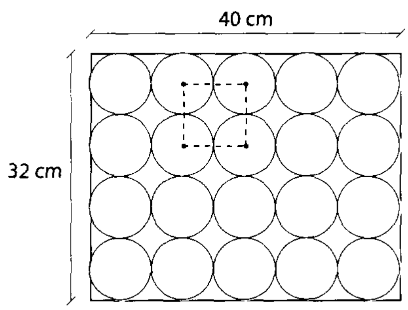
SOLUCIÓN

Analicemos las dos posibilidades



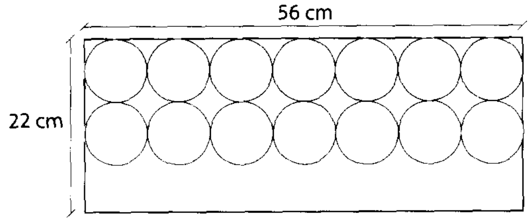
➢ **Si el productor utiliza cajas del tipo A**

Como las latas tienen un radio de 4 cm pueden inscribirse, como muestra la figura, en un cuadrado de 8 cm de lado, luego podemos ubicar: 5 latas en cada fila y 4 latas en cada columna, es decir, 20 latas en cada caja.

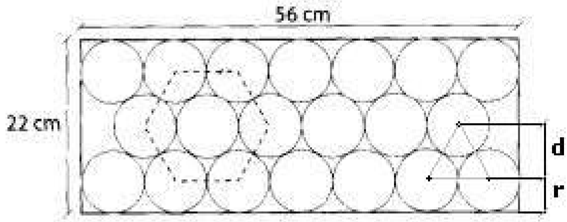


➢ **Si el productor utiliza cajas del tipo B**

Por las dimensiones de estas cajas, si se aplica el criterio anterior, se pueden ubicar 7 latas en dos filas, pero queda mucho espacio sin utilizar. La figura muestra otra posible disposición de las latas: dos filas de 7 y una intermedia de 6 latas.



Para asegurarnos que es posible, calculamos la distancia entre dos filas adyacentes. Como muestra la figura, la distancia *"d"* es la altura del triángulo equilátero que se determina uniendo los centros de las bases de tres latas contiguas, su valor es:



$$d = 8\ cm\ sen\ 60° = 8cm.\ \frac{1}{2}\sqrt{3} = 4\sqrt{3}\ cm$$

Luego para disponer las latas de este modo el largo de la base de las cajas debe ser como mínimo igual a 2 r + 2 d , es decir:

$$2\ .\ 4\ cm + 2\ .\ 4\sqrt{3}\ cm = 8\ cm + 8\sqrt{3}\ cm \cong 21{,}856\ cm$$

Como las cajas tienen un largo de 22 cm es posible ubicar 20 latas en las cajas de tipo B.

¿?

¿ Puedes inferir cuál es el tipo de caja que ofrece el mayor rendimiento?

Para responder a las preguntas planteadas en el problema operamos con distintos tipos de números.

A continuación, vamos a recordar las definiciones y las propiedades de los distintos conjuntos numéricos.

1.2.0 NÚMEROS NATURALES

Los números naturales surgieron, como comentamos anteriormente, de la necesidad de contar; este conjunto está formado por los elementos 1, 2, 3,..... y se designa con el símbolo ***N***.

Es decir, el conjunto ***N*** es aquél en que cada elemento se obtiene de sumar una unidad al elemento anterior. De esta forma el conjunto ***N*** resulta ordenado, o sea, dados dos números naturales a y b distintos, siempre uno es menor que otro.

Esto se expresa diciendo que a es menor que b ó b es mayor que a.

$$a < b \quad ó \quad b > a$$

El conjunto ***N*** tiene primer elemento (1) y no tiene último elemento, por lo que decimos que es infinito.

Indicamos ***N*** = {1, 2, 3, 4,......}.

Los números naturales se pueden sumar y multiplicar y el resultado es otro número natural. No siempre ocurre lo mismo con la resta y la división. ¿Por qué?

El producto de n números naturales desde 1 hasta n, se escribe n! y se llama factorial de n

Se escribe:

n! = n(n-1).....2.1
n! = n(n-1)!
0! = 1
3! = 3.2.1=6

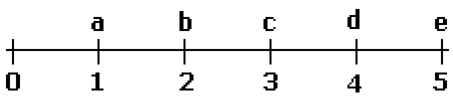
Verificá con tu calculadora:

8! = 40320
10! = 3628800

1.2.1 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE *N*

Consideramos una recta cualquiera y sobre ella un punto origen *"o"*. Tomamos un segmento arbitrario como unidad y trasladándolo a partir del origen hacia la derecha, obtenemos sucesivas divisiones a, b, c,....Luego se hace corresponder a cada división un número natural.

O sea



A cada punto marcado en la recta se lo llama *"la gráfica"* del número natural correspondiente, mientras que el número asignado a cada punto se le llama *"la coordenada"* del mismo.

Verificá cual de las siguientes operaciones da como resultado un número natural.

a) $8+\frac{(3-2)^2}{4}-\sqrt{25}=$

b) $(4-2^2)+3\sqrt{25}-\frac{4}{2}=$

c) $\frac{3}{4}+\frac{2}{5}-1=$

d) $\sqrt[3]{8}.\sqrt{25}=$

En China, alrededor del siglo XII a.C. aparece el I-Ching, un libro de adivinación con interesantes reflejos matemáticos, que tiene que ver con el sistema de numeración en base 2 (sistema binario). También es chino el primer cuadrado mágico, al que se le atribuían propiedades mágicas interesantes. Según una vieja leyenda, apareció en el caparazón de una tortuga que salió del río Lo.

4	**9**	**2**
3	**5**	**7**
8	**1**	**6**

La suma de los números de las filas, columnas y diagonales es 15.

1.3.0 NÚMEROS ENTEROS

Eratóstenes (aprox. 276-196 a.C.) fue un famoso geógrafo, matemático y - astrónomo griego. Calculó con exactitud la circunferencia de la Tierra con un método ingenioso. Sin embargo su mayor fama la debe a su método de determinar números primos que hoy | se llama *criba de Eratóstenes*. Ese método consiste en hacer una lista de los enteros, comenzando por 2 (que es el primer primo), y después tachar todos los múltiplos de 2, que no son primos. El siguiente número de los que quedan en la lista es 3, que es el segundo primo, y de nuevo se tachan todos sus múltiplos. E1 siguiente número que queda es 5, el tercer número primo; se tachan todos sus múltiplos, y se continúa así. De esta forma, todos los números que no son primos quedan tachados, y los números restantes son los números primos.

Cuando en la resta el minuendo es menor o igual que el sustraendo, aparece la primera restricción en el conjunto ***N***.

Para definir esa operación, se amplía este conjunto al conjunto de los números enteros que se denotan con ***Z***.

Este conjunto ***Z*** es tal que:

- Contiene todos los elementos de ***N***.
- Al definir las operaciones en ***Z***, se conservan los resultados y propiedades de ***N***.
- La resta cuando el minuendo es menor o igual que el sustraendo siempre tiene solución.

Para ello, definimos el conjunto de los números negativos, donde cada elemento es el número opuesto de cada n e ***N***. Y se denomina con *"-n"*

O sea el conjunto de los números enteros es:

$$\boldsymbol{Z} = \{.........-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

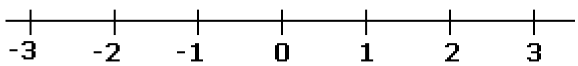
1.3.1 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE *Z*

¿?

a) Z ¿Tiene primer y último elemento?
b) Z ¿Es un conjunto ordenado?

Justificá tus respuestas

El conjunto ***Z*** se puede representar ampliando la recta de números naturales, en divisiones sucesivas a partir del origen, a la izquierda y por simetría.



1.4.0 NÚMEROS RACIONALES

El conjunto ***Q*** de los números racionales es un conjunto que contiene a los enteros ***Z*** y además en él tienen solución las divisiones donde el dividendo no es múltiplo del divisor.

Para ello definimos los *"números fraccionarios"* como el cociente entre dos enteros a y b cualesquiera, (b ≠ 0).

Los números $\frac{1}{5}$; $-\frac{3}{4}$; $\frac{12}{7}$ son números fraccionarios.

Luego tenemos que ***Q*** = ***Z*** ∪ ***F***, es decir, el conjunto de números racionales es unión del conjunto de números enteros y el conjunto de números fraccionarios.

Dos o más fracciones distintas pueden representar el mismo número. Esto es así, porque una fracción puede ser la forma más simplificada de otra.

Por ejemplo, las fracciones $\frac{4}{5}$ *y* $\frac{8}{10}$ representan el mismo número ya que $\frac{8}{10} = \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 2}$

Si dos fracciones $\frac{a}{b}$ *y* $\frac{c}{d}$ son tales que a . d = b . c entonces son iguales o sea representan el mismo número.

1.4.1 EXPRESIONES DECIMALES

$\frac{2}{50} = 0{,}04; \quad \frac{2}{3} = 0{,}\hat{6};....$

"Un número racional puede expresarse con una fracción o con una expresión decimal"

Al efectuar la división entre numerador y denominador de una fracción, para obtener la expresión decimal puede ocurrir que:

- En algún paso de la división el resto es cero.
- En algún momento los restos comiencen a repetirse.

En el primer caso se obtiene una expresión decimal finita y en el segundo se dice que la expresión decimal es periódica, las cifras que se repiten forman el período de la expresión decimal.

$\frac{1}{4} = 0{,}25$
expresión decimal finita.

$-\frac{1}{3} = -0{,}333....= -0{,}\hat{3}$
expresión decimal infinita.

$\frac{3549}{990} = 3{,}5848484... = 3{,}584$
expresión decimal infinita

RECÍPROCAMENTE:

"Toda expresión decimal finita ó periódica corresponde a un número racional"

Un número fraccionario también puede escribirse como una expresión decimal, que puede ser finita o infinita.

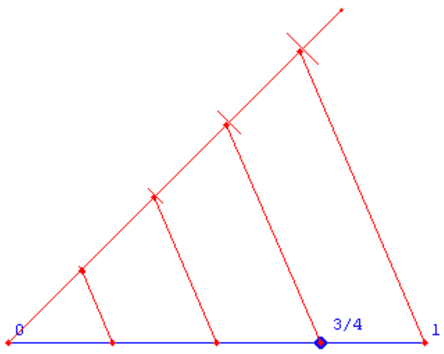
Las expresiones decimales infinitas tienen *"período"* y pueden tener *"parte no periódica"* como el tercer ejemplo. La parte anterior a la coma se llama *"parte entera"*. Las expresiones decimales pueden, recíprocamente, expresarse como una fracción.

1.4.2 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE Q

Los números racionales se pueden representar construyendo las fracciones sobre la recta.

➢ ***Si el numerador es menor que el denominador*** (es decir, su expresión decimal es un número comprendido entre 0 y 1)

Para representar el número $\frac{3}{4}$, dividimos al segmento unidad en cuatro partes iguales y tomamos 3, contando desde 0. Para ello seguimos los siguientes pasos utilizando regla, escuadra y compás:



- Dibujamos un segmento horizontal. Señalamos el extremo izquierdo con el número 0 y el derecho con el 1. Ese será nuestro segmento unidad.
- Trazamos desde el 0 una semirrecta cualquiera que no sea horizontal.
- Con el compás, marcamos en esa semirrecta, desde el 0, cuatro medidas iguales.
- Con una regla trazamos el segmento que une la última marca del compás en la semirrecta con el punto 1.
- Utilizando la regla y la escuadra, trazamos paralelas a ese segmento que pasen por las otras tres marcas del compás.
- Los puntos de corte de esos segmentos en el segmento unidad dividen al mismo en cuatro partes iguales.

➢ ***Si el numerador es mayor que el denominador*** (es decir, su expresión decimal es un número mayor que 1)

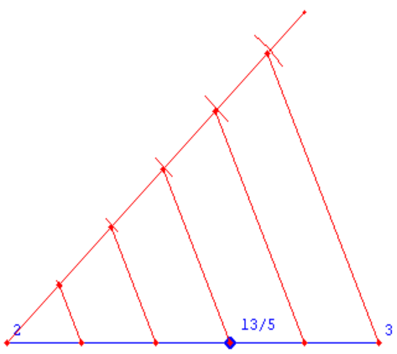
¿?

¿N es denso?
¿Z es denso?

La fracción se puede descomponer en suma de un número entero más una fracción menor que la unidad. Por ejemplo:

$$\frac{13}{5} = 2 + \frac{3}{5},$$

donde 2 es el cociente entero de la división de 13 entre 5 y 3, el resto.
Así, el número 13/5 será un punto comprendido entre el 2 y el 3. Para representar el número 13/5 deberemos representar el número 3/5 en el segmento [2,3], es decir, dividir el segmento [2,3] en 5 partes y tomar 3 desde el punto 2.



En esta construcción, podemos ver que dados dos puntos de una recta (representativos de números racionales) entre ellos se pueden realizar aún infinitas divisiones.

Esto es lo mismo que decir que entre dos números racionales siempre existen "infinitos racionales".

Por gozar de esta propiedad, se dice que ***Q*** es *"denso"*. Se podría pensar entonces que toda la recta está cubierta, o sea, que cada punto de ella es la gráfica de algún número racional y viceversa. Sin embargo, veremos a continuación, que ello no es cierto.

1.5.0 NÚMEROS IRRACIONALES

Existen números tales como $\sqrt{2} = 1{,}4142$ .... $\sqrt{3} = 1{,}7320$ .... 1,10100100010000...
etc. que tienen infinitas cifras decimales y sin embargo no tienen período.

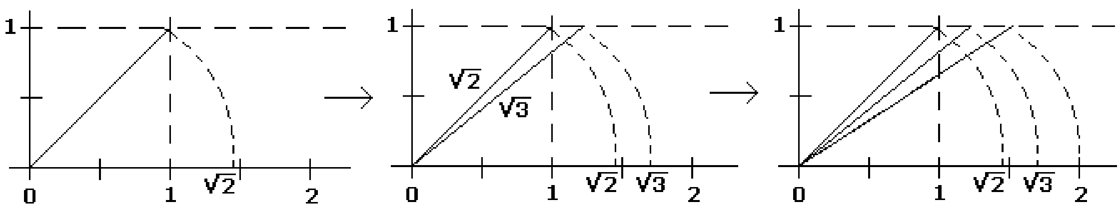
Estos números no pueden representarse como cociente entre dos enteros a y b. Estos son los números irracionales.

Además del número Φ (número de oro) ya definido, existen otros irracionales muy conocidos como:

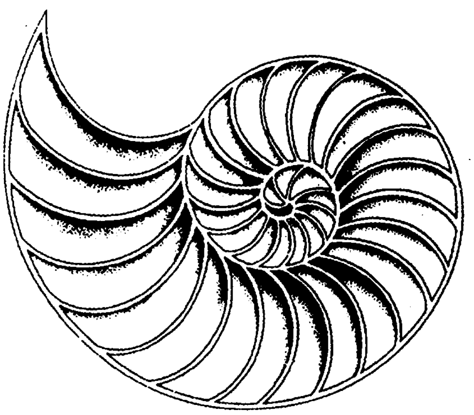
- El número π, que se usa para calcular, por ejemplo, la longitud de la circunferencia o el área de un círculo, tiene como expresión decimal: 3,1415926535..... Su irracionalidad se probó recién en el siglo XVIII.

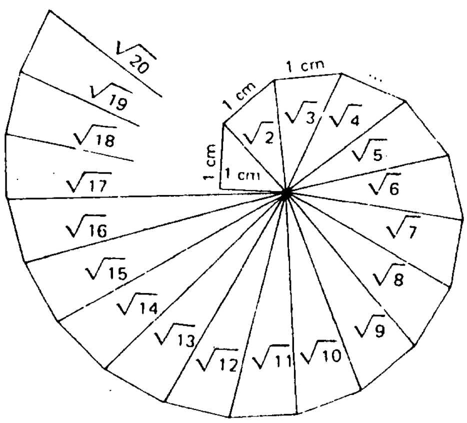
- El número ***e***, posiblemente el número más importante en matemática superior. Su valor decimal es: 2,718281..... Aparece en ciertos procesos de crecimiento vegetal o animal, en la desintegración radiactiva, en la fórmula de la *catenaria* (que es la curva que describe un hilo flexible que cuelga sujeto sólo por sus extremos),...

1.5.1 DIBUJANDO ALGUNOS IRRACIONALES EN LA RECTA



☺ La matemática en la naturaleza





1.6.0 NÚMEROS REALES

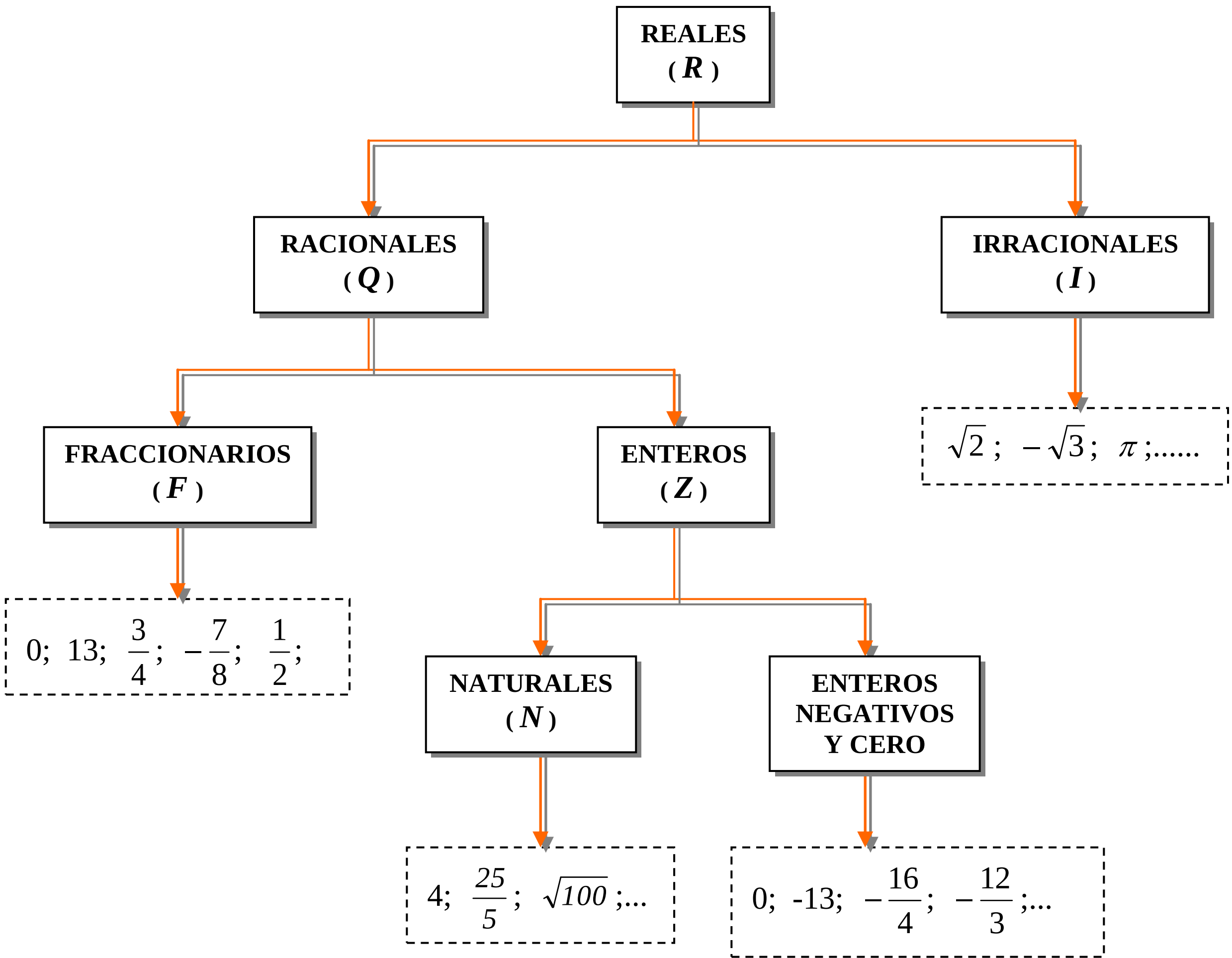
Los números racionales y los irracionales forman un nuevo conjunto llamado ***<u>números reales</u>*** que se representan por R.

Estos números completan la recta.

> ***Cada punto de la recta es gráfica de algún número real y cada número real es la coordenada de algún punto de la recta.***

Esta correspondencia es biunívoca, es decir, uno a uno.

El siguiente diagrama representa las sucesivas ampliaciones que realizamos del campo numérico.



1.6.1 OPERACIONES EN R – PROPIEDADES

En el conjunto de números reales podemos definir las operaciones de: adición, multiplicación, potenciación, radicación,...

Propiedad	Adición	Multiplicación
Ley de Cierre	$\forall a,b \in R \rightarrow a+b \in R$	$\forall a,b \in R \rightarrow a.b \in R$
Ley Uniforme	$\forall a,b,c \in R \;\; y \;\; a=b$ $\Rightarrow a+c=b+c$	$\forall a,b,c \in R \;\; y \;\; a=b$ $\Rightarrow a.c=b.c$
Ley Asociativa	$\forall a,b,c \in R$ $\Rightarrow (a+b)+c=a+(b+c)$	$\forall a,b,c \in R$ $\Rightarrow (a.b)c=a(b.c)$
Ley Conmutativa	$\forall a,b \in R$ $\Rightarrow a+b=b+a$	$\forall a,b \in R$ $\Rightarrow a.b=b.a$
Elemento neutro	$\exists\, 0 \in R \;\; /$ $a+0=0+a=a \quad \forall a \in R$	$\exists\, 1 \in R \;\; /$ $a.1=1.a=a \quad \forall a \in R$
Inverso	$\forall\; a \in R \quad \exists\, b \in R \;\; /$ $a+b=b+a=0 \quad (b=-a)$	$\forall\; a \in R, a \neq 0 \;\; \exists\, b \in R \;\; /$ $a.b=b.a=1 \quad (b=a^{-1})$
Distributiva de la multiplicación respecto a la adición	$a(b+c)=a.b+a.c \quad \forall a,b,c \in R$	

POTENCIACIÓN

DEFINICIÓN

Sea $a \in R,\ n \in N$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\ veces}$$

$$a^0 = 1 \ \ si \ \ a \neq 0$$

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \ \ si \ \ a \neq 0$$

PROPIEDADES

Sean $n,m \in Z$

- $(a.b)^n = a^n b^n$
- $a^n a^m = a^{n+m}$
- $a^n : a^m = a^{n-m}$
- $(a^n)^m = a^{n.m}$

IDENTIDADES NOTABLES

Recordemos algunas identidades de uso frecuente en cálculos numéricos y algebraicos.

- $a(b+c)=ab+ac$ (Propiedad distributiva).
- $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ (Cuadrado de un binomio).
- $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ (Cuadrado de un binomio).
- $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ (Cubo de un binomio).
- $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ (Diferencia de cuadrados).

✍

a) $7a^2b^3-14ab^2+21a^2b=$
b) $(4-x)^2+(x-4)^4=$
c) $16-x^4=$
d) $x^2-3=$
e) $(x+3)^2+(x-4)^3+(x-4)(x+3)=$

RADICACIÓN

DEFINICIÓN

$\sqrt[n]{a}=b$ *si y sólo si* $a=b^n$, *con* $n\in N$

$\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$

- *Si a>0,* $\sqrt[n]{a}\ \exists\ en\ R\ \forall\ n\in N$

☞ $\sqrt{7}\ ;\ \sqrt[4]{21}\ ;\ \sqrt[5]{0{,}789}$

- *Si a<0;.* $\sqrt[n]{a}\ \exists\ en\ R$ solo si n es impar

☞ $\sqrt[3]{-8}=-2\ ;\ \sqrt{-8}$ *no tiene solución en R*

PROPIEDADES

Sean $a,b\in R;\ n,m,p\in N$

- $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$
- $\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a/b}$ si $b\neq 0$
- $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n.p]{a^{m.p}}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[m\cdot n]{a}$

Gerolamo Cardano (1501-1576) es sin lugar a dudas uno de los personajes más singulares en la historia de las matemáticas. En su época fue el médico con mayor renombre en Europa y a pesar de ello sufrió toda su vida numerosas enfermedades, incluyendo fracturas, hemorroides y el terror irracional a encontrarse con perros rabiosos. Sus adorados hijos lo hicieron sufrir-su consentido finalmente fue decapitado por haber asesinado a su esposa. Cardano fue un jugador compulsivo pero aprovechó este vicio para escribir el *Baok on Games of Chance*, el primer estudio de las probabilidades desde un punto de vista matemático correcto.
Su obra matemática de mayor importancia fue el *Ars magna*, en el cual detalló la solución de las ecuaciones polinomiales generales de tercer y cuarto grado. En el momento de su publicación los matemáticos se sentían incómodos incluso con los números negativos pero las fórmulas de Cardano abrieron camino a. la aceptación no sólo de los números negativos sino también de los números imaginarios, ya que se presentan de manera natural en la resolución de las ecuaciones polinomiales. Por ejemplo, una de sus fórmulas da la solución

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}\ \text{-}\ \sqrt[3]{-2+\sqrt{-121}}$$

para la **ecuación cúbica**

$$x^3-15x-4=0$$

Este valor para x de hecho resulta ser el *entero* 4, aunque para determinarlo Cardano tuvo que utilizar el número imaginario $\sqrt{-121}=11i$

1.6.2 OPERACIONES CON RADICALES

➢ ***Adición y sustracción de radicales***

Solo es posible sumar o restar términos con radicales semejantes. Dos radicales son *semejantes* cuando tienen igual índice y el mismo radicando.

a) $2\sqrt{3}+\sqrt{3}-5\sqrt{3}=(2+1-5)\sqrt{3}=-2\sqrt{3}$

b) $4\sqrt{2}-2\sqrt{5}+3\sqrt{2}+6\sqrt{5}=(4+3)\sqrt{2}+(-2+6)\sqrt{5}=\sqrt{2}+4\sqrt{5}$

c) $3\sqrt{2}-5\sqrt{32}+7\sqrt{8}=3\sqrt{2}-5\sqrt{2^5}+7\sqrt{2^3}$

$=3\sqrt{2}-5\sqrt{2^4}.\sqrt{2}+7\sqrt{2^2}.\sqrt{2}$

$=3\sqrt{2}-5.2^2\sqrt{2}+7.2\sqrt{2}$

$=3\sqrt{2}-20\sqrt{2}+14\sqrt{2}$

$=(3-20+14)\sqrt{2}=-3\sqrt{2}$

➢ ***Multiplicación y división de radicales***

El producto o cociente de varios radicales es el radical que se obtiene al multiplicar o dividir radicales reducidos a común índice.

a) $\sqrt[5]{x^3}.\sqrt[5]{x}=\sqrt[5]{x^3.x}=\sqrt[5]{x^4}$

b) $\sqrt[5]{3}.\sqrt[4]{2}=\sqrt[20]{3^4}.\sqrt[20]{2^5}=\sqrt[20]{3^4.2^5}=\sqrt[20]{81.32}=\sqrt[20]{2592}$

c) $\dfrac{\sqrt[6]{4}}{\sqrt[4]{2}}=\dfrac{\sqrt[12]{\left(2^2\right)^2}}{\sqrt[12]{2^3}}=\sqrt[12]{\dfrac{2^4}{2^3}}=\sqrt[12]{2}$

1.6.3 RACIONALIZACIÓN DE DENOMINADORES

Dada una fracción en cuyo denominador aparece algún radical, se entiende por <u>racionalizar</u>, encontrar otra fracción igual a la dada y en cuyo denominador no figuren radicales.

☞

1) $\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

2) $\dfrac{3}{\sqrt[5]{64}}=\dfrac{3}{\sqrt[5]{2^6}}=\dfrac{3}{2\sqrt[5]{2}}=\dfrac{3\sqrt[5]{2^4}}{2\cdot\sqrt[5]{2}\cdot\sqrt[5]{2^4}}=\dfrac{3\sqrt[5]{16}}{2\sqrt[5]{2^5}}=\dfrac{3\sqrt[5]{16}}{4}$

3) $\dfrac{3}{3-\sqrt{3}}=\dfrac{3(3+\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}=\dfrac{3(3+\sqrt{3})}{3^2-(\sqrt{3})^2}=\dfrac{3(3+\sqrt{3})}{9-3}=\dfrac{\cancelto{1}{3}(3+\sqrt{3})}{\cancelto{2}{6}}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$

4) $\dfrac{-2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\dfrac{-2(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\dfrac{-2(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{3-2}=-2(\sqrt{3}+\sqrt{2})$

1.7.0 NOTACIÓN CIENTÍFICA

Un número escrito en notación científica consta de una parte decimal, mayor o igual a 1 y menor que 10, seguido de una potencia de 10.

1) Indicá en notación científica.

a) 15320000000000=
b) 0,00000000001532=

2) Expresá el resultado en notación científica.

a) $(4{,}23.10^{-4}).(5{,}04.10^{9})$
b) $\dfrac{4{,}23.10^{-4}}{5{,}04.10^{9}}$

Cuando un número es muy grande o muy pequeño conviene expresarlo en notación científica, pues esta indica directamente el orden de magnitud.

Así por ejemplo:

1. La edad del universo se calcula en 15.000.000.000 = $1{,}5\ .10^{10}$ años.
2. El diámetro del electrón es aproximadamente

   0,0000000000010 mm = 10^{-12} mm.

Verificá las operaciones con tu calculadora

1.8.0 EXPRESIÓN APROXIMADA DE UN NÚMERO

En algunos casos, al operar con números que tienen expresiones decimales infinitas se utilizan aproximaciones de ésta.

Así, al utilizar el número $\pi = 3{,}14159265.....$ se pueden, por ejemplo, considerar aproximaciones al diezmilésimo, o sea, con cuatro cifras decimales, por truncamiento o por redondeo.

Aproximación por truncamiento: se eliminan todas las cifras decimales, a partir de la quinta, y se obtiene: $\pi = 3{,}1415$.

Aproximación por redondeo: se elimina a partir de la quinta cifra y como $9>5$ se aumenta en una unidad a la última cifra conservada: $5+1=6$; luego se obtiene $\pi = 3{,}1416$.

EN GENERAL:

La aproximación por truncamiento: a una cifra determinada consiste en eliminar las cifras que le siguen.

La aproximación por redondeo consiste en:

- ***Aumentar*** en una unidad la última cifra conservada, si la primera cifra a eliminar es igual o mayor que *5*
- ***Truncar*** directamente el número a la cantidad de cifras deseadas, si la primera cifra eliminada es menor que *5*.

Aproximá usando dos dígitos:

a) 5,432 b) 3,053
c) 6,789 d) 12,674
e) 302,109 f) 6,911
g) 8,945 h) $\sqrt{2}$

ACTIVIDADES

René Descartes (1596-1650) nació en la ciudad de La Haye en el sur de **Francia,** y desde temprana edad tuvo afición por las matemáticas debido a "la certidumbre de sus resultados y a la **sencillez** de su lógica". Creía que a fin de descubrir la verdad uno debe em**pezar** por dudar de todo, incluyendo la propia existencia; esto lo condujo a formular quizá la frase más conocida de toda la filosofía: "Pienso, luego existo". En su libro *Discurso del método* describió lo que ahora se conoce como el plano cartesiano. Esta idea de combinar el álgebra con la geometría permitió por vez primera a los matemáticos "visualizar" las ecuaciones que estudiaban y el filósofo John Stuart Mill dijo que esta invención era "el paso individual más grande alguna vez realizado en el avance de las ciencias exactas". Descartes gustaba de levantarse tarde y quedarse en cama por las mañanas pensando y escribiendo. Inventó el plano coordenado al observar a una mosca desplazarse en el cielo raso y razonar que podía describir la localización exacta de la mosca al saber a qué distancia estaba de dos paredes perpendiculares entre sí. En 1649 Descartes se convirtió en el tutor de la Reina Cristina de Suecia, la cual gustaba recibir sus lecciones a las 5 en punto de la mañana cuando, decía, su mente estaba más despejada.

1) Ordená de menor a mayor, e indicá a qué conjunto numérico pertenece cada número:

a) $\frac{1}{4}$ **b)** 10^{-1} **c)** $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-1}$ **d)** $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}$

e) 2π **f)** e^2 **g)** $\sqrt{25}$ **h)** $-\frac{5}{6}$

i) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **j)** $-\frac{27}{18}$ **k)** $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}$ **l)** $\sqrt[5]{-32}$

2) Si es posible, ubicá cada elemento del siguiente conjunto en la categoría que corresponda:

$$\left\{0\,;\,-10\,;\,50\,;\,-\pi\,;\,0{,}532\,;\,\sqrt{7}\,;\,1{,}2\overset{\frown}{3}\,;\,\frac{22}{7}\,;\,\frac{2}{3}\right\}$$

a) Enteros no naturales.
b) Naturales no enteros.
c) Racionales no enteros.
d) Reales no racionales.
e) Irracionales no reales.

3) Determiná si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando cada respuesta:

a) $\sqrt{3}$ es un número irracional pero $2\sqrt{3}$ no lo es.
b) Todo número natural es racional.
c) $\sqrt{2}$ es un número irracional pero no real.
d) El único número racional mayor que 2,1 y menor que 2,3 es 2,2.
e) Todo número real es racional.
f) $\sqrt{5}$ y $\sqrt{5}\cdot\sqrt{45}$ son números irracionales.

4) En busca de conclusiones.

a) Escribí un número racional mayor que 1.
b) Escribí un número racional mayor que 1, pero menor que el anterior.
c) Escribí más números racionales, cada vez menores, pero siempre mayores que la unidad.
d) Tratá de hallar el menor número racional que sea mayor que la unidad.
e) ¿Qué conclusión obtenés?

5) Indicá si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificá en cada caso:

a) Entre dos números enteros hay siempre un entero.
b) Entre dos números racionales, siempre hay un racional.
c) Entre dos números racionales siempre hay un irracional.
d) Entre dos números racionales hay siempre infinitos racionales e irracionales.
e) Los números racionales completan la recta.
f) Los números reales completan la recta.

6) Resolvé (Sugerencia: aplicá propiedades cuando sea posible)

a) $\left(-4-2^0\right)^2 =$ **b)** $\left(-4\right)^{-2} =$

c) $\left(\dfrac{2}{7}\right)^0 =$ **d)** $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2 =$

e) $\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{2}\right)^{-2}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}} =$ **f)** $\dfrac{a^2\cdot\left(b\cdot c\right)^2}{\left(a\cdot b\right)^3} =$

g) $3^x\cdot 3^x\cdot 3^x\cdot 3^x =$ **h)** $\left[\left(a^5.a^{-2}\right)^{-1}.\left(a^5:a^2\right)^{-1}\right]^3 =$

i) $\sqrt{\dfrac{9}{\sqrt[3]{64}}} =$ **j)** $\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{8}\cdot\sqrt{8}}{27}}$

k) $\dfrac{\sqrt{\sqrt[3]{27}\cdot 3}}{\sqrt[4]{2^6}\cdot\sqrt{2}} =$ **l)** $\sqrt[6]{x^4}\cdot\sqrt[9]{x^6}\cdot\sqrt[15]{x^{10}} =$

m) $\dfrac{\sqrt{x}\cdot\sqrt{\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x}} =$ **n)** $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} =$

7) Resolvé las siguientes operaciones:

a) $\sqrt{2}+\sqrt{2}-5\sqrt{2} =$ **b)** $\sqrt{a}-2\sqrt{b}+\sqrt{a}-\sqrt{b} =$

c) $3\sqrt{18}-11\sqrt{2}+2\sqrt{50} =$ **d)** $\sqrt{9x}-\sqrt{25x}+\sqrt{49x} =$

e) $\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{\dfrac{16}{27}}-\dfrac{5}{3}\sqrt[3]{54}+5\sqrt[3]{\dfrac{2}{125}} =$ **f)** $\sqrt[4]{48}-\dfrac{3}{2}\cdot\sqrt[4]{32}-\dfrac{1}{3}\cdot\sqrt[4]{243}+\sqrt[4]{162} =$

g) $\dfrac{1}{10}\cdot\sqrt{125}-4\cdot\sqrt{\dfrac{5}{16}}+2\cdot\sqrt{\dfrac{5}{36}} =$ **h)** $\sqrt{12a}-2\sqrt[4]{9a^2} =$

i) $\sqrt{x^5}+4x\sqrt{x^3}-\sqrt[4]{81x^{10}} =$ **j)** $\sqrt[4]{2a^2}.\sqrt[4]{ab}.\sqrt[4]{2ab} =$

k) $\sqrt{3}.(\sqrt{6}-\sqrt{24})+\sqrt{98} =$ **l)** $\sqrt{m}.\sqrt[3]{m^2}.\sqrt[4]{m^3} =$

m) $\sqrt[3]{ab^2}.\sqrt[5]{a^2b^3} =$ **n)** $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{4}} =$

8) Resolvé $\dfrac{\sqrt[6]{2\cdot\sqrt[3]{2^6}}}{\sqrt[3]{\sqrt{2^7}}}$ de dos maneras diferentes: aplicando propiedades de la radicación y aplicando propiedades de exponente fraccionario.

9) Racionalizá:

a) $\dfrac{10}{\sqrt[3]{2}}=$ **b)** $\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{x}}=$ **c)** $\dfrac{4}{\sqrt[9]{256y^8}}=$

d) $\dfrac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}}=$ **e)** $\dfrac{12}{\sqrt[3]{9}}=$ **f)** $\dfrac{1}{\sqrt[4]{27}}=$

g) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}=$ **h)** $\dfrac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}=$ **i)** $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=$

j) $\dfrac{5\sqrt{14}}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}=$ **k)** $\dfrac{3-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}=$

10) En cada caso, indicá la opción correcta justificando tu respuesta:

a) La cuarta parte del duplo de $\frac{1}{3}$ es:

$\frac{1}{9}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{2}{3}$

b) El triple de la diferencia entre $\frac{4}{3}$ y $\frac{1}{6}$ es:

3,5 $\frac{7}{3}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{21}{5}$

c) El resultado de $\left(2^{-1}:\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right).\frac{1}{8}$ es:

2 $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ $\frac{1}{2}$ $\left(\frac{1}{2}\right)^5$

d) La racionalización de $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{6}}$ es:

$-\sqrt{5}+\sqrt{6}$ $\sqrt{5}-\sqrt{6}$ $-\sqrt{5}-\sqrt{6}$ $\sqrt{5}+\sqrt{6}$

e) El desarrollo de $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2$ es:

5 $\qquad 5-2\sqrt{6} \qquad 5+2\sqrt{6}$ $\qquad$ -1

f) Si $a\,.\,b=1$ y $a=\frac{\sqrt{5}}{2}$, entonces el valor de b es:

$\frac{1}{\sqrt{5}} \qquad \sqrt{5} \qquad \frac{2\sqrt{5}}{5} \qquad -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

11) El cabello humano crece aproximadamente un centímetro por mes. ¿Cuánto se estima podría crecer en una hora?.

12) Se define el año-luz como la distancia que recorre la luz en un año. Si la luz se desplaza en el espacio con una velocidad de 3.10^5 *km/seg*, calculá a cuántos kilómetros equivale un año luz.

13) La Biblioteca del Congreso tiene aproximadamente 59 millones de libros. Si cada libro tiene en promedio 270 páginas. ¿Cuántas páginas habrá en total en la Biblioteca del Congreso?

14) Se sabe que 10^{28} electrones pesan 9 gramos; que un neutrón pesa 1834 veces más que un electrón, y que *100.000* neutrones pesan lo mismo que *100.014* protones. Calculá la masa, en gramos, de un protón, de un electrón, y de un neutrón.

15) Un cuarto aislado de hospital se llena de oxígeno puro. Sus dimensiones son 5 m de ancho, 10 m de largo y 3 m de alto. Sabiendo que un metro cúbico contiene 1000 litros y que 22,4 litros de cualquier gas contiene $6{,}02.10^{23}$ moléculas (número de Avogadro), ¿cuántas moléculas de oxígeno hay en el cuarto?

16) En promedio hay 7000000 de glóbulos blancos por mililitro de sangre humana. Si se sabe que por cada kilogramo una persona tiene 80 ml de sangre, ¿cuántos glóbulos blancos tendrá una persona que pesa 70 kg?

17) La unidad de masa atómica (uma) tiene $1{,}6606.10^{-27}$ kg. Si el átomo de carbono tiene 12 uma, ¿cuál es en kilógramos la masa de 14000000 átomos de carbono?

18) Escribí cuatro números tales que su aproximación por redondeo a los décimos sea 3,4; de modo que dos de ellos sean mayores que su aproximación y los otros dos sean menores.

19) Calculá dos aproximaciones hasta las milésimas del número racional $\frac{15}{7}$.
¿Cuál de las dos está más próxima a la fracción dada?

20) Calculá la longitud del lado de un cuadrado inscripto en una circunferencia de *8 cm* de radio.

21) Calculá la diagonal de un cubo de arista igual a $\sqrt{3}$ *dm*.

Los babilonios tuvieron gran conocimiento de las técnicas algebraicas y, más tarde, los griegos se valieron de la geometría para resolver problemas algebraicos.

La palabra Álgebra tiene su origen en el título del libro *"Aljabr w'al muqabalah"* que fue escrito en Bagdad hacia el año 825 por un matemático musulmán llamado Al-Khwarizmi.

Un poco de historia

En los inicios de la Matemática las fórmulas y las ecuaciones, así como sus resoluciones, se expresaban verbalmente. La utilización del lenguaje algebraico –por ejemplo, los signos que representan las operaciones aritméticas (+, –, ×, ÷, √, ...) o las letras (x, y, z, a, b, ...) para nombrar las incógnitas– que agilizó el cálculo y facilitó los desarrollos, se introdujo recién a partir de los siglos XVI y XVII.

Entre los numerosos problemas aritméticos hallados en los papiros egipcios, se encuentran algunos de tipo algebraico, como la siguiente expresión que figura en el famoso papiro de Rhind (1650 a. C.):

☞ *Un montón y una séptima parte del mismo es igual a 24*

En el lenguaje actual esta expresión la podemos escribir: $x + \frac{1}{7}x = 24$ donde "*x*" representa el "montón" al que se refiere el autor.

De las palabras a los símbolos

El lenguaje algebraico sirve para expresar los problemas con más claridad.

Antiguamente los problemas matemáticos se planteaban y resolvían utilizando el lenguaje natural; con el transcurso del tiempo las palabras se fueron sustituyendo por símbolos hasta llegar a las expresiones algebraicas que utilizamos actualmente.

Lenguaje coloquial	Lenguaje simbólico
• El duplo de un número natural.	$2n$
• el cuadrado del triple de n.	$(3n)^2$
• dos números pares consecutivos.	$2n;\ 2n+2$
• la distancia recorrida por un móvil es igual a su velocidad por el tiempo que está en movimiento.	$d = v\,t$
• el volumen de una esfera es igual al producto de 4/3 π por el cubo de su radio.	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
• el cuadrado de la diferencia de dos números es igual a la suma de sus cuadrados menos el doble de su producto.	$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

Las igualdades en las que intervienen expresiones algebraicas son frecuentes. Las hay de distintos tipos: identidades, fórmulas, ecuaciones.

1.9.1 IDENTIDADES

Una identidad es una igualdad algebraica cierta para todo valor de las variables que intervienen.

Algunas de las que ya conoces son las siguientes:

- $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$
- $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
- $a^2 - b^2 = (a - b)\,(a + b)$
- $a\,(b + c) = ab + ac$
- $a^n.a^m = a^{n+m}$

Estas identidades sirven para transformar una expresión algebraica en otra más simple o cómoda de usar.

1.9.2 FÓRMULAS

¿?

Escribí algunas fórmulas que recuerdes.

Las fórmulas son expresiones que simplifican los enunciados de las leyes y principios de todas las ciencias.

La igualdad: $d = v\,t$ relaciona tres magnitudes físicas (distancia, velocidad, tiempo). Desde el punto de vista algebraico es una ecuación que liga tres variables, si conocemos el valor de dos de ellas podemos calcular el de la tercera.

1.9.3 ECUACIONES

La palabra ecuación viene del latín ***aequare*** que significa igualar.

Una ecuación es una propuesta de igualdad.

Obtener la solución de una ecuación es, como lo analizaremos en los próximos temas, encontrar el o los valores de las incógnitas con los que se logra igualar los dos miembros de la misma.

Las siguientes expresiones son ecuaciones:

(a) $2x + 1 = 27$
(b) $l^2 = 4$
(c) $3x + 4y = 0$
(d) $x^3 = 81$
(e) $x^2 + 4 = 0$
(f) $x^2 - 2x + 1 = 0$

Nos detenemos a analizar las ecuaciones lineales o de primer grado con una incógnita; es decir, de la forma:

$$\boxed{ax + b = 0 \quad , \quad con\ a, b \in \Re \ , \ a \neq 0 \quad , \quad x : incógnita}$$

Planteo de ecuaciones

Plantear una ecuación es convertir un enunciado en lenguaje coloquial al lenguaje algebraico. Después de fijar la incógnita de un problema cada información del enunciado se transforma en una expresión algebraica.

(1) Pienso un número, lo duplico, le sumo 5 y el resultado es 11. ¿Cuál es el número?

Lenguaje coloquial	Lenguaje algebraico
• número pensado • duplico • sumo 5 • resultado es 11	x $2x$ $2x + 5$ $2x + 5 = 11$

Solución de ecuaciones

Resolver la ecuación significa responder a la pregunta: ¿para qué valor de la variable se verifica la igualdad?

Existen distintos métodos, y se puede elegir el que resulte más adecuado para cada problema, el más utilizado es el de transposición.

> Hay ecuaciones sin solución. Significa que no se cumplen para ningún valor de la(s) variable(s).
> Hay ecuaciones con infinitas soluciones. Significa que es verdadera para cualquier valor de la(s) variable(s).

Calculemos la solución de los ejemplos planteados por el método de transposición:

$2x+5=11$	• ecuación original.
$2x=11-5$	• se suma –5.
$x=\frac{6}{2}=3$	• se multiplica por ½.
$S=\{3\}$	• Solución.

$$Verificación:\ 2.3+5=11$$

(2) En un rectángulo un lado es 5 cm. más largo que el otro, si el perímetro mide 32 cm. ¿cuánto mide cada lado?

Dibujo	Lenguaje coloquial	Lenguaje algebraico
x $x + 5$	• lado más corto • lado más largo • perímetro • perímetro igual a 32	x $x + 5$ $2x + 2(x + 5)$ $2x + 2(x + 5) = 32$

Solución

$2x+2(x+5)=32$	• ecuación original.
$2x+2x+10=32$	• propiedad distributiva.
$4x+10=32$	• se opera en el primer miembro.
$4x=32-10$	• se suma –10.

$$4x = 22$$ • se resuelve el segundo miembro.

$$x = \frac{22}{4} = 5{,}5$$ • se multiplica por ¼.

$$Solución: \begin{cases} lado\ menor: 5{,}5\,cm. \\ lado\ mayor: 10{,}5\,cm. \end{cases}$$

$$Verificación: 2.5{,}5 + 2(5{,}5 + 5) = 11 + 2.10{,}5 = 11 + 21 = 32$$

☞ Diofanto fue un famoso matemático griego del siglo III d.C. De su vida no se sabe mucho, pero en el epitafio de su tumba aparecen algunos detalles sobre ella.

Diofanto vivió en Alejandría aproximadamente en el año 250 a.C. Escribió un libro titulado *Aritmética,* el cual se considera como el primero acerca de álgebra. En él se plantean métodos para obtener soluciones enteras de ecuaciones algebraicas. Este texto se ha leído por más de mil anos. Fermat hizo algunos de sus más importantes descubrimientos mientras estudiaba este libro. La principal contribución de Diofanto es el uso de símbolos para representar las incógnitas en un problema. Aunque su simbolismo no es tan sencillo como el que se utiliza hoy en día, fue un avance importante en comparación con escribir con palabras. En **la notación de** Diofanto la ecuación $x^5 - 7x^2 + 8x - 5 = 24$

se escribe

$\Delta K^{\gamma}\alpha\varsigma\theta\Delta^{\gamma}\eta M\varepsilon\iota\kappa\delta$

Nuestra moderna notación algebraica no se utilizó de forma común sino hasta el siglo XVII.

• *Caminante!. Aquí yacen los restos de Diofanto. Los números pueden mostrar, oh maravilla! La duración de su vida*	x
• *Cuya sexta parte constituyó la hermosa infancia*	$\frac{x}{6}$
• *Había transcurrido además una duocémina parte de su vida cuando se cubrió de vello su barba*	$\frac{x}{6} + \frac{x}{12}$
• *A partir de ahí, la séptima parte de su existencia transcurrió en un matrimonio estéril.*	$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7}$
• *Pasó, además, un quinquenio y entonces le hizo dichoso el nacimiento de su primogénito.*	$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5$
• *Este entregó su cuerpo y su hermosa existencia a la tierra habiendo vivido la mitad de lo que su padre llegó a vivir.*	$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2}$
• *Por su parte Diofanto descendió a la sepultura con profunda pena habiendo sobrevivido cuatro años a su hijo.*	$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4$
• *Dime, caminante, cuántos años vivió Diofanto hasta que le llegó la muerte.*	$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$
La edad de Diofanto es	$x = 84$

☞ **Más ejemplos.**

Calculá si existe la solución de las siguientes ecuaciones.

a) $x + 8 = 3$

$x = 3 - 8 = -5$ $\quad S = \{-5\}$

b) $2x - 3 = \frac{1}{2}$

$2x = \frac{1}{2} + 3$ $\quad S = \left\{\frac{7}{4}\right\}$

$x = \frac{7}{4}$

c) $3x - 1 = -2x + 4$

$3x + 2x = 4 + 1 = 5$ $\quad S = \{1\}$

$5x = 5 \rightarrow x = 1$

d) $4 - 5(4x - 2) = x - 3(2x + 1)$

$4 - 20x + 10 = x - 6x - 3$

$-20x - x + 6x = -3 - 4 - 10$ $\quad S = \left\{\frac{17}{15}\right\}$

$15x = 17$

e) $5- 2\,(x + 3) = \dfrac{-1}{2}\left(4\,x+2\right)$

$5- 2\,x - 6 = - 2\,x - 1$ $\qquad\qquad$ $S = R$

$-2\,x + 2\,x = - 1 + 6 - 5$

$0x = 0$

Esto implica que cualquier x $\in$ R es solución de la ecuación, esto es, la ecuación tiene infinitas soluciones.

f) $3\,x - 1 = 6\left(\dfrac{x}{2}+5\right)$

$3x - 1 = 3\,x + 30$

$3\,x - 3\,x = 30 + 1$

$0\,x = 31$ $\qquad\qquad$ $S = \phi$

Esto es un absurdo, lo que quiere decir que no existe ningún valor que satisfaga la ecuación. Decimos que el conjunto solución es vacío.

Otros tipos de ecuaciones con una incógnita.

Si el producto de varios factores es cero, por lo menos uno de ellos es cero.

Si a.b=0 entonces a=0 o b=0.

Usando esta propiedad es posible resolver ecuaciones no lineales con una variable, como las de los próximos ejemplos.

☞

a) $-8(x-1)=0$

b) $(3x+2)x=0$

c) $(3x+2)(5-x)(\sqrt{3}-2x)=0$

d) $\dfrac{3-2x}{x+2}=0$

e) $\dfrac{2-2(x-1)}{-2x+4}=0$

SOLUCIONES:

(a) $-8(x-1)=0$

$como\ -8\neq 0 \Rightarrow x-1=0\ luego\ x=1 \therefore S=\{1\}$

(b) $(3x+2)x=0$

debe ser $3x+2=0$

ó $x = 0$

si $3\,x + 2 = 0 \Rightarrow x=-\dfrac{2}{3}$

$\therefore S=\left\{0,-\dfrac{2}{3}\right\}$

(c) $(3x+2)(5-x)(\sqrt{3}-2x)=0$

debe ser $3x+2=0$ ó $5-x=0$ ó $\sqrt{3}-2x=0$

si $3x+2=0 \Rightarrow x=-\dfrac{2}{3}$

si $5-x=0 \Rightarrow x=5$

si $\sqrt{3}-2x=0 \Rightarrow x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore S=\left\{-\dfrac{2}{3},5,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

Los valores que anulan un cociente son los que anulan el numerador, pero no el denominador, ya que éste debe ser distinto de cero.

(d) $\dfrac{3-2x}{x+2}=0$

Para que se anule el cociente debe ser

$3-2x=0$ y $x+2\neq 0$

De $3-2x=0 \rightarrow x=\dfrac{3}{2}$ Como este valor no anula el denominador, es solución de la ecuación. $\therefore$ $S=\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$

(e) $\dfrac{2-2(x-1)}{-2x+4}=0$; $x\neq 2$

Debe ser $-2x+4\neq 0 \rightarrow x\neq \dfrac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{2}_{1}} \rightarrow x\neq 2$

Pero si $2-2(x-1)=0 \rightarrow 2-2x+2=0 \rightarrow -2x+4=0$

$x=2$

El conjunto solución es vacío, ya que el cociente es distinto de 0 para todo x para el que está definido. $\therefore$ $S=\phi$

ACTIVIDADES

1) Escribí en lenguaje algebraico las siguientes afirmaciones relativas a la base ***x*** y la altura *y* de un rectángulo.

a) La base es el doble de la altura.
b) La base excede en 5 unidades a la altura.
c) La altura es $\frac{2}{5}$ de la base.
d) La base es a la altura, como 7 es a 3.
e) El área de un rectángulo es 50 cm^2
f) La base y la altura difieren en 10 unidades

2) Expresá en forma simbólica los siguientes enunciados:

a) El área *A*, de un círculo es el cuadrado de su radio *r* por π.
b) En un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa *a*, es igual a la suma de los cuadrados de los catetos *b* y *c*.
c) La diferencia de los cuadrados de dos números enteros consecutivos es 23.
d) Si al triple de 8 le quitamos 5, obtenemos lo mismo que si al doble de 9 le sumamos 1.

3) Asociá, si es posible, cada expresión con su traducción coloquial. En caso negativo, escribí la traducción correspondiente.

i. $3 \cdot b^3 - b^2$ **ii.** $3 \cdot \sqrt{x-1}$ **iii.** $x^3 - 3x$

iv. $\left(b - b^2\right)^2$ **v.** $\left(x^2 - x^3\right)^3$ **vi.** $3 \cdot \sqrt[3]{2x-1}$

a) La diferencia entre el cuadrado de un número y su triple.
b) El triple de la raíz cúbica de la diferencia entre el doble de un número y dos.
c) El cubo de la diferencia entre el cuadrado de un número y su cubo.
d) La diferencia entre el triple del cubo de un número y su cuadrado.
e) El triple de la raíz cuadrada del anterior de un número.

4) En cada caso, indicá la expresión que corresponde al enunciado:

a) Andrés (A) es 4 años mayor que Nicolás (N).
i. $A = N + 4$ ii. $N = A + 4$ iii. $A = 4 - N$

b) La suma de los cuadrados de dos números distintos es igual a 25.
i. $(x + y)^2 = 25$ ii. $x^2 + y^2 = 25$ iii. $x + y^2 = 25$

c) El triple de un número es igual al doble de su consecutivo.
i. $3t = 2t + 1$ ii. $t + 3 = 2t + 1$ iii. $3t = 2(t + 1)$

d) La suma de tres números consecutivos es 63.
i. $3x = 63$ ii. $x + x + 1 + x + 2 = 63$ iii. $3(x + 1) = 63$

e) La diferencia de los cuadrados de dos números consecutivos es 23.

i. $x^2 - \left(x^2 + 1\right) = 23$ ii. $\left(x + 1\right)^2 - x^2 = 23$ iii. $\left(x^2 + 1\right) - x^2 = 23$

5) Completá para llegar al resultado:

a) $b + \ldots = 2b$ **b)** $y \ldots y = y^2$

c) $x^2 + x^2 = \ldots x^{\cdots}$ **d)** $p^2 \cdot \ldots = p^5$

e) $\ldots + c^2 = 2c^2$ **f)** $x \ldots x \ldots x = x^3$

6) Completá utilizando propiedades y productos notables:

a) $-\left(1 - a + z\right) = \ldots 1 \ldots a \ldots z$

b) $\ldots \cdot \left(x + b\right) = x^2 + bx$

c) $\left(a + b\right)^2 = \ldots + b^2 + 2a \ldots$

d) $\left(a \ldots 5\right)^2 = a^2 - 10a + 25$

e) $a + \ldots \left(a + b\right) = 3a + 2b$

7) Del quíntuplo de un número se resta 26 y queda el triple del número. Calculá dicho número e indicá a qué conjunto numérico pertenece.

8) La suma de tres números enteros consecutivos es 48 ¿Cuáles son los números?

9) La tercera parte de la suma de dos números consecutivos es igual a la mitad del mayor de ellos. ¿Cuáles son los números?

10) Calculá la cuarta parte de un número si se sabe que la mitad de dicho número es igual a las tres quintas partes del mismo, aumentadas en dos unidades. Indicá a que conjunto numérico pertenece.

11) El promedio entre un número y sus dos consecutivos inmediatos es igual a las dos séptimas partes del número más seis unidades. ¿Cuáles son los números?

12) Entre las 8 y las 9 de la mañana una pileta vacía se llena hasta la cuarta parte. A las 10 se agrega una tercera parte más, y a las 11 se adiciona la mitad de lo que faltaba. Si todavía faltan 50000 litros para que la pileta esté llena, ¿qué capacidad tiene la pileta?

13) Para ir a ver a su novia, Luis recorre la quinta parte del camino en moto. Un problema en la moto lo obliga a tomar un colectivo en el que recorre la tercera parte del camino que le falta. El último tramo de 12 km lo hace a pie. ¿Cuántos kilómetros separaban a Luis de su novia?

14) Se debe distribuir una bonificación de \$300000 entre 500 empleados de una fábrica.
Hay 50 hombres de 20 años de servicio, 100 con 10 años y 350 con 5 años. El que tiene 20 años de trabajo recibirá el doble que el que tiene 10, y a su vez, éste, el doble que el de 5 ¿Cuánto corresponde a cada tipo de empleado?

15) Un padre tiene 33 años y su hijo 10. ¿Cuándo la edad del padre será el duplo de la del hijo?

16) La edad actual de un padre es el triple que la de su hija. Hace siete años, la suma de las edades era igual a la edad actual del padre. ¿Cuántos años tienen padre e hija?

17) Una persona compra un electrodoméstico que cuesta \$1170 pagando las dos quintas partes en efectivo y el resto en tres cuotas. Las tres cuotas cumplen las siguientes condiciones: la primera es igual a las tres cuartas partes de la segunda, y la segunda es las dos terceras partes de la tercera. ¿Cuál es el importe de cada cuota?

18) La diagonal de un rectángulo forma con los lados un triángulo de 12 cm de perímetro. La longitud de los lados del triángulo corresponden a tres números enteros consecutivos. Encontrá la longitud de los lados del rectángulo y la de la diagonal.

19) Si a la longitud de uno de los lados de un cuadrado se la aumenta en 5 cm y a la del lado contiguo en 3 cm, el área de la figura aumenta en 71 cm^2. Determiná la longitud del lado del cuadrado original.

20) Un grupo de personas gana una rifa y cada una recibe \$270. Si hubieran tenido que compartir el premio con cuatro personas más, le hubieran tocado \$54 menos a cada uno. ¿Cuántas personas participaron de la rifa?

21) Si el precio de un artículo aumenta en un 20% resulta 36 dólares más caro que si su precio se disminuye en un 4%. ¿Cuál es el costo del artículo?

22) Calculá, si existe, la solución de las siguientes ecuaciones e indicá a qué conjunto numérico pertenece:

a) $-3x + 4 = 2x - 20$

b) $3.(x-2) + 5x = \frac{4}{9}x + 2$

c) $2.(x+1) - 3.(x-1) = 2.\left(1 - \frac{1}{2}x\right) + 3$

d) $\frac{5-x}{3} - \frac{1-2x}{2} - \frac{x-1}{6} = 0$

e) $\sqrt{2x+5} = 6$

f) $\frac{3x+5}{6} + \frac{x}{18} - \frac{5x+4}{9} = 1$

h) $\sqrt{5}x + \left(\sqrt{5}-1\right)\cdot\left(\sqrt{5}+1\right) = -6$

g) $-4.\left(x-3\right) = 0$

i) $(3x+2).(x-1)=0$

j) $-\frac{1}{2}.\left(x^2+\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{8}$

k) $-\frac{x^3+3}{3}+\frac{1}{2}=-\left(\frac{1}{3}x^2\cdot x+0,5\right)$

l) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^3=-2^{-3}$

m) $\sqrt{5}x+\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)=-6$

n) $\frac{1}{5}x^2-\left(\sqrt{40}+7\right)=-\frac{9}{2}-2\sqrt{10}$

o) $\left(\sqrt{3}-1\right)x-\frac{x^2-4}{2}=-2^{-1}x^2$

p) $\frac{4}{x-1}+\frac{2}{x+1}=\frac{26}{x^2-1}$

q) $\frac{1}{x}=\frac{4}{3x}+1$

r) $\frac{-3x+4}{x-2}=0$

s) $\frac{(2x-3).(x-2)}{2-x}=0$

Un enunciado como: *"El número de alumnos de la clase de Análisis no supera los 50 alumnos"*, origina expresiones donde se utilizan los símbolos " > ", " < ", " ≥ ", " ≤ ".

En este caso lo expresamos: $x < 50$

Una inecuación es una propuesta de desigualdad.

Las relaciones numéricas que se expresan con los signos " < " y " > " se llaman <u>desigualdades</u> y las relaciones algebraicas correspondientes se llaman <u>inecuaciones</u>

Así: (*) $30 > \frac{5}{2}$; $-\frac{1}{2} < 0$ son <u>desigualdades</u>

(*) Las relaciones: $-3x + 2 < 50$; $4x - \frac{1}{2} \geq 0$ son <u>inecuaciones</u>

Así, por ejemplo, en: $-3x + 2 < 50$

$$-3x + 2 - 2 < 50 - 2$$

$$-3x < 48 \qquad \text{(se multiplica por: } -\frac{1}{3}\text{)}$$

$$x > -16$$

En cambio en: $4x - \frac{1}{2} \geq 0$

$$4x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$$

$$4x \geq \frac{1}{2} \qquad \text{(se multiplica por: } \frac{1}{4}\text{)}$$

$$x \geq \frac{1}{8}$$

Algunas propiedades de las desigualdades, necesarias para resolver las inecuaciones.

Sean a y b $\in$ R , con $a < b$ se verifica:

(a) $a + k < b + k$ $\forall\ k \in R$

(b) $a \cdot k < b \cdot k$ si $k > 0$

(c) $a \cdot k > b \cdot k$ si $k < 0$

(d) $a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

Para resolver inecuaciones son válidos los mismos pasos que para resolver ecuaciones, la única diferencia es que, cuando una incógnita está multiplicada por un número negativo se invierte el sentido de la desigualdad.

1.9.5 INTERVALOS

Entre los conjuntos de números que usaremos con más frecuencia se encuentran los <u>intervalos.</u>

Consideremos dos números reales fijos **a** y **b**, con $a \leq b$, definimos los intervalos del siguiente modo:

	Notación de conjunto	Notación de intervalo
INTERVALO ABIERTO	$\{x \in R \,/\, a < x < b\}$	(a, b)
INTERVALO CERRADO	$\{x \in R \,/\, a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$
INTERVALO SEMI-ABIERTO	$\{x \in R \,/\, a < x \leq b\}$ $\{x \in R \,/\, a \leq x < b\}$	$(a, b]$ $[a, b)$
INTERVALOS INFINITOS	$\{x \in R \,/\, a < x\}$ $\{x \in R \,/\, a \leq x\}$ $\{x \in R \,/\, a > x\}$ $\{x \in R \,/\, a \geq x\}$ $\{x \,/\, x \in R\}$	$(a, +\infty)$ $[a, +\infty)$ $(-\infty, +a)$ $(-\infty, a]$ $(-\infty, +\infty)$

1.9.6 REPRESENTACIÓN GRAFICA DE INECUACIONES

Las soluciones de las inecuaciones, como vimos en los ejemplos, pueden ser de la forma : $x < a$; $x \leq a$; $x > a$; $x \geq a$ que en notación de intervalo se expresan, respectivamente, $(-\infty, a)$; $(-\infty, a]$; $(a, +\infty)$; $[a, +\infty)$ y gráficamente significan:

```
(- ∞ , a)     -/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-)---------------------->
                                           a
( - ∞ , a]    -/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-]---------------------- >
                                           a
(a , + ∞)     ---------------------------(-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/ >
                                           a
[a , + ∞)     ---------------------------[-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/ >
                                           a
```

1.9.7 SISTEMAS DE INECUACIONES

Calcular las soluciones comunes a dos o más inecuaciones es resolver el sistema de inecuaciones formado por ellas.

Las soluciones de los sistemas de inecuaciones pueden ser de la forma:

$$a < x < b \;;\; a \leq x < b \;;\; a < x \leq b \;;\; a \leq x \leq b$$

y se indican respectivamente por:

$$(a, b) \;;\; [a, b) \;;\; (a, b] \;;\; [a, b].$$

y representan, como ya definimos, <u>intervalos</u> en la recta real.

(1) Expresá en lenguaje simbólico las siguientes proposiciones:

(a) Si a un número se le restan dos unidades el resultado no es menor que cinco.
(b) Si al triplo de un número se le agregan cuatro unidades su resultado es a lo sumo 10.
(c) Si a un número se le suma su quinta parte el resultado es mayor o igual que su duplo aumentado en 3 unidades.
(d) El triplo de la diferencia de un número y 4 no es menor que -7.

Solución

(a) $x - 2 \geq 5$ (b) $3x + 4 \leq 10$

(c) $x + \frac{1}{5}x \geq 2x + 3$ (d) $3(x - 4) \geq -7$

(2) Resolvé y graficá, en *R*, la solución de las inecuaciones:

(a) $-5x + 2 \geq 2\left(x + \frac{1}{2}\right)$ (b) $3(x - 1) + 4 < -3x + 2$

(c) $2x + 1 < 2(4 + x)$ (d) $-3x - 5 \geq \frac{1}{2}(7 - 6x)$

(e) $\begin{cases} x + 3 < 0 \\ 5 - 2x \geq 1 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} 2x + 1 > 0 \\ 5 - x \geq 0 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} 3x - 6 > 0 \\ x + 1 \leq 0 \end{cases}$ (h) $(x - 1)(x + 2) \leq 0$

(i) $(x + 3)^2 (x - 1) > 0$ (j) $\frac{x + 2}{1 - x} \geq 0$

(k) $\frac{1}{x} < \frac{1}{3}$ (l) $\frac{1 + x}{2 - x} \geq 1$

Solución

(a) $-5x + 2 \geq 2\left(x + \frac{1}{2}\right)$

$-5x + 2 \geq 2x + 1$

$2 - 1 \geq 2x + 5x$

$1 \geq 7x$ ----------→ $\frac{1}{7} \geq x$

$S = \left(-\infty, \frac{1}{7}\right]$

-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-]---------------------- >

$\frac{1}{7}$

(b) $3(x - 1) + 4 < -3x + 2$

$3x - 3 + 4 < -3x + 2$

$3x + 3x < 2 - 1$

$6x < 1$

$x < \frac{1}{6}$

$S = \left(-\infty, \frac{1}{6}\right)$

-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-)--------------------- >

$\frac{1}{6}$

(c) $2x + 1 < 2(4 + x)$

$2x + 1 < 8 + 2x$

$1 < 8$

S=R La desigualdad se cumple siempre.

-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-●-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/ >

(d) $-3x - 5 \geq \frac{1}{2}(7 - 6x)$

$-3x - 5 \geq \frac{7}{2} - 3x$

$-5 \geq \frac{7}{2}$

S= ϕ La desigualdad no se cumple nunca.

(e) $\begin{cases} x + 3 < 0 \\ 5 - 2x \geq 1 \end{cases}$

$x + 3 < 0 \Rightarrow x < -3$ -/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-)----|------------------------>

-3 0

$5 - 2x \geq 1 \Rightarrow x \leq 2$ -/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/|-/-/-/-]------------------>

2

$S = (-\infty, -3)$ -/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-)------------------------------ >

-3

(f) $\begin{cases} 2x + 1 > 0 \\ 5 - x \geq 0 \end{cases}$

$2x + 1 > 0 \Rightarrow x > -\frac{1}{2}$ --------------------(-/-/-|-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/ >

-1/2

$5 - x \geq 0 \Rightarrow 5 \geq x$ -/-]---------->

5

$S = \left(-\frac{1}{2}, 5\right]$ --------------------(-/-/-|-/-/-/-/-/-/-/]---------- >

-1/2 5

(g) $\begin{cases} 3x - 6 > 0 \\ x + 1 \leq 0 \end{cases}$

$3x - 6 > 0 \Rightarrow x > 2$ ----------------------|--------(-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/- >

```
                                                  0      2
x + 1 ≤ 0   ⇒  x ≤ - 1      -/-/-/-/-/-/-/-/-]-----|------------------------------>
                                              -1    0
```

$S = \phi$

(h) $(x - 1)(x + 2) \leq 0$

El signo del producto depende del signo de los factores. Los números 1 y -2 son los puntos donde los factores cambian de signo.

```
Signo (x - 1)               ---------------------------+++++++++++
                                     ________________|______|_____________
                                                  0        1

Signo (x + 2)               --------+++++++++++++++++++++++
                            ______|_________|__________________
                                 -2           0

Signo (x - 1) (x + 2)       +++++------------------+++++++++++
                            ______|_______________|_____________
                                 -2                  1
```

La desigualdad se verifica para todo $x \in [-2, 1]$. La solución se expresa:

$S = [-2, 1]$

(i) $(x + 3)^2 (x - 1) > 0$

El factor $(x + 3)^2$ es siempre positivo. Para que el producto dado sea positivo debe verificarse que $(x - 1) > 0$, o sea, $x > 1$. Los puntos del intervalo $(1, +\infty)$ verifican la desigualdad

$S = (1, +\infty)$

(j) $\dfrac{x+2}{1-x} \leq 0$

Como en los ejemplos precedentes, el signo de este cociente depende del signo de los factores. Los números - 2 y 1 son los puntos donde los factores cambian de signo. Además, debemos tener en cuenta que $x \neq 1$ porque este valor anula el denominador.

```
Signo (x+2)         ------------------++++++++++++++++
                    __________________|_______|______________
                                     -2        0

Signo (1-x)         ++++++++++++++++------------------
                    __________________|_______|______________
                                      0        1
```

Signo $\left(\dfrac{x+2}{1-x}\right)$

```
                    ------------------+++++------------------
                    __________________|_______|______________
                                     -2        1
```

La desigualdad se verifica para todo $x \in (-\infty, -2] \cup (1, +\infty)$. La solución se expresa: $S = (-\infty, -2] \cup (1, +\infty)$

FRBB

(k) $\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{3}$

Un método para resolver el problema consiste en transformar la expresión en un cociente para analizar su signo como en el ejemplo anterior.

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{3} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3-x}{3\,x} < 0$$

sig (3 - x)

```
+++++++++++++++-----------------------
_________________|_________________
                 3
```

sig (3 x)

```
----------+++++++++++++++++++++++
_______|___________________________
       0
```

sig $\left(\dfrac{3-x}{3\,x}\right)$

```
----------+++++++++----------------------
_______|_________|_________________
       0         3
```

S = (- ∞ , 0) ∪ (3, + ∞)

(l) $\dfrac{1+x}{2-x} \geq 1$

$$\frac{1+x}{2-x} - 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x-1}{2-x} \geq 0$$

sig (2x - 1)

```
------------------------------++++++++++
_________________|_____|____________
                 0     ½
```

sig (2 - x)

```
+++++++++++++++++++++++++++-----
__________________|____________|_____
                  0            2
```

sig $\left(\dfrac{2x-1}{2-x}\right)$

```
-------------------------------++++++++-----
__________________|_____|_________|_____
                  0     ½         2
```

S = $\left[\dfrac{1}{2}, 2\right)$

ACTIVIDADES

1) ¿Existen números reales que verifiquen que: $x \geq 3$ y $x < 7$? ¿y en el caso de que $x \leq -2$ y $x > 5$? ¿ y en el caso $x \geq 2$ y $x \leq 2$?

2) Dados los siguientes subconjuntos de números reales, expresalos mediante inecuaciones, representalos en la recta numérica y escribilos en forma de intervalos:

a) Los valores de x mayores que 2 y menores que 6.
b) Los valores de x mayores o iguales que -1.
c) Los valores de x menores que 2/3.
d) Los valores de x que superan al menor número entero positivo.
e) Los valores de x menores que el mayor número par negativo.
f) Los valores de x comprendidos entre los dos múltiplos positivos de 3 de un solo dígito.

3) El lado de un hexágono regular es menor que 3 cm, ¿qué podés decir de su perímetro y de su área?

4) Expresá en lenguaje simbólico:

a) El doble de un número disminuido en cinco unidades es por lo menos 12.
b) El triple de un número aumentado en 8 unidades es menor que 20.
c) El doble de la suma de un número y 5 no es mayor que 4.
d) Si a un número se le agrega la tercera parte, la suma es menor o igual que su triple.

5) Me alcanzan $978 para comprar 6 revistas técnicas, pero no me alcanzan $1898 para comprar 13. ¿Entre qué valores oscila el precio de una revista?

6) Una furgoneta pesa 875 kg. La diferencia entre el peso de la furgoneta vacía y el peso de la carga que lleve no debe ser inferior que 415 kg. Si hay cuatro cajones iguales, ¿cuánto puede pesar, como máximo, cada uno de ellos para poder llevarlos en la furgoneta?

7) Se quiere alquilar un auto para un viaje y las opciones que se presentan son: un costo fijo de $100 a lo que se agrega $20 por kilómetro recorrido o un costo inicial de $400 más $17 por kilómetro recorrido. ¿Cuánto habrá que recorrer para que la primera opción sea la más conveniente?

8) En las instrucciones de la caja de un determinado artículo, indica que debe conservarse a una temperatura entre 5°C y 30°C. Sabiendo que los grados Celsius (C) son equivalentes a los cinco novenos de la diferencia entre los grados Fahrenheit (F) y 32, ¿entre qué temperatura en grados Fahrenheit se debe conservar el artículo?

9) Se estima que el costo anual de manejar un cierto automóvil nuevo se obtiene multiplicando los kilómetros recorridos por diez y sumarle un monto fijo de $39600. Si una persona que compra este auto puede gastar el próximo año en su uso entre $115000 y $130000, ¿cuántos kilómetros podrá recorrer?

10) Una persona tiene veinte años menos que otra. Si las edades de ambas suman a lo sumo 86 años, ¿cuál es la edad máxima que podría tener la primera persona?

11) En un examen de 40 preguntas se otorgan dos puntos por cada acierto y se restan 0,5 por cada respuesta incorrecta. ¿Cuántas preguntas hay que contestar bien para obtener un mínimo de 60 puntos?

12) El producto de un número entero por otro, dos unidades mayor, no es mayor que 8. ¿Cuál puede ser ese número?

13) Un grupo de amigos decide ir a un recital. El costo de contratar el colectivo para que los lleve es de $8100 y se debe repartir en partes iguales entre todos los que viajen. Los promotores del recital ofrecen descuentos a los grupos que lleguen en colectivo. Las entradas cuestan normalmente $900 cada una, pero se realiza un descuento de $1,8 por cada persona que vaya en el grupo (hasta la capacidad máxima del colectivo).
¿Cuántos amigos deben ir en el grupo para que cada uno pague menos de $972?

14) Resolvé las siguientes inecuaciones, representá el conjunto solución en la recta y escribilo en forma de intervalo:

a) $3.\left(x-4\right)\geq 18x+5$

b) $\frac{1}{2}x-5\geq x+\frac{3}{4}$

c) $2-4.\left(x+3\right)<5.\left(x+1\right)+3$

d) $3x-12\geq\frac{5x-6}{4}$

e) $\frac{5x+1}{6}>2-\frac{2x+1}{3}$

f) $\frac{\sqrt{5}x-2+\sqrt{3}}{3}\geq\frac{1}{\sqrt{3}}+1$

g) $1,\widehat{3}\cdot\left(\frac{6x-3}{4}\right)-\frac{x-1}{6}<1$

h) $\frac{\sqrt{48}-5x}{2}+2\sqrt{3}\leq 0$

i) $\begin{cases}4x-1<0\\ x+5\geq 0\end{cases}$

j) $\begin{cases}4-2x\geq 1\\ 3x+5<0\end{cases}$

k) $\begin{cases}4x+5<7x-2\\ x-1<3x-6\end{cases}$

l) $\left(2x-3\right).\left(x+4\right)>0$

m) $\left(3-x\right).\left(2x+1\right)<0$

n) $x^2-2x\leq 0$

o) $\frac{x-\frac{1}{2}}{x+1}<0$

p) $\frac{x}{x+1}>3$

q) $\frac{3}{x}\leq 1$

r) $\frac{x+1}{1-x}\geq 1$

s) $\frac{5x-4}{x+3}-2<\frac{2x}{x+3}$

t) $\frac{x}{-4-x}>\frac{2}{4+x}$

1.10.0 VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO REAL

El valor absoluto de un número real <u>a</u> se define como el número <u>no negativo</u>, que notamos $|a|$ ***. determinado por:.***

$$|a| = \begin{cases} a & si \quad a > 0 \\ 0 & si \quad a = 0 \\ -a & si \quad a < 0 \end{cases}$$

El valor absoluto es siempre un valor positivo.

☞ $|2| = 2$; $|-3| = 3$; $|\sqrt{2}| = \sqrt{2}$; $|0| = 0$

Enunciamos algunas propiedades :

Propiedad	Ejemplos
1 - $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$	$|-3 \cdot 7| = |-3| \cdot |7| = 21$
2 - $|a+b| \leq |a| + |b|$	$|-8+3| \leq |-8| + |3| \Rightarrow > 5 \leq 11$
3 - $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$	$\left|\frac{8}{-2}\right| = \frac{|8|}{|-2|} = \frac{8}{2} = 4$
4 - $|a-b| = |b-a|$	$|3-5| = |5-3|$
5 - $\sqrt{a^2} = |a|$	

Podemos asociar el valor absoluto de un número con el concepto geométrico de distancia.

Sean x e y números reales, se llama <u>distancia</u> entre x e y al número real | x-y |.
Simbolizamos d (x , y) = | x – y |

Propiedades:

Para todo x , y , z ∈ R se verifica:

(a) $d(x, y) \geq 0$;

(b) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(c) $d(x, y) = d(y, x) \Leftrightarrow |x - y| = |y - x|$

(d) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \Leftrightarrow |x - y| \leq |x - z| + |z - y|$

Expresá simbólicamente los siguientes enunciados:

(1) x está a más de 3 unidades de 7
$d(x, 7) = |x - 7| > 3$

(2) x no está a más de 5 unidades de 8
$d(x, 8) = |x - 8| \leq 5$

(3) x está a 4 unidades de –3
$d(x, -3) = |x + 3| = 4$

Relacioná cada conjunto de la columna de la izquierda con su expresión correspondiente de la columna de la derecha.

(1) El conjunto de los números reales cuya distancia a –3 es menor que 1.	(a) $\|x\| \geq 3/2$
(2) El conjunto de los números reales cuyo cuadrado es mayor que 4.	(b) $\|x - 7\| < 5$
(3) El conjunto de los números reales cuya distancia a –4 es igual a su distancia a 3.	(c) $\|x\| > 2$
(4) El conjunto de los números reales cuya distancia al origen es mayor o igual a 3/2.	(d) $\|x + 3\| < 1$
(5) El conjunto de los números reales cuya distancia a 7 es menor que 5.	(e) $\|x + 4\| = \|x - 3\|$

1.10.1 ECUACIONES E INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

Son relaciones algebraicas de uso frecuente, esencialmente en el análisis de funciones.

Analizaremos algunos ejemplos.

1 - Calculá, si existen, el o los valores de x que verifican las siguientes ecuaciones:

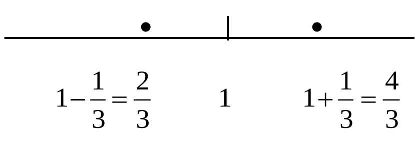
a) $|x - 3| = 0$

$$|x - 3| = 0 \rightarrow x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$$

b) $|2x - 6| = 0 \rightarrow 2x - 6 = 0 \rightarrow x = 3$

c) $|x - 1| = \frac{1}{3}$

$$|x - 1| = d(x, 1) = \frac{1}{3}$$



<u>Solución:</u> $\left\{ \frac{2}{3}, \frac{4}{3} \right\}$

d) $\left|5x-2\right|=\dfrac{1}{2}$

Solución: $\left|5\,x-2\right|=\left|5\cdot\left(x-\dfrac{2}{5}\right)\right|=\left|5\right|\cdot\left|x-\dfrac{2}{5}\right|=5\left|x-\dfrac{2}{5}\right|$

Por lo tanto: $\left|5\,x-3\right|=\dfrac{1}{2}$

$$5\left|x-\frac{2}{5}\right|=\frac{1}{2}\rightarrow\left|x-\frac{2}{5}\right|=\frac{1}{10}$$

$$d\left(x,\frac{2}{5}\right)=\frac{1}{10}$$

$$\frac{3}{10}\qquad\frac{2}{5}\qquad\frac{5}{10}$$

Solución: $\left\{\dfrac{3}{10},\dfrac{1}{2}\right\}$

e) $\left|4x+2\right|=3$

Solución $\left|4\,x+2\right|=\left|4\left(x+\dfrac{2}{4}\right)\right|=\left|4\right|\cdot\left|x+\dfrac{1}{2}\right|=4\left|x+\dfrac{1}{2}\right|=3$

luego $\left|x+\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{3}{4}$ o sea $d\left(x,-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{4}$

$$\left\{-\frac{5}{4},\frac{1}{4}\right\}$$

$$-\frac{5}{4}\qquad-\frac{1}{2}\qquad\frac{1}{4}$$

2- Calculá, si existe, la solución de las inecuaciones :

a) $\left|x\right|<2$

$\left|x\right|=\left|x-0\right|=d\left(x,0\right)<2$

-------(-/-/-/-/-/-|-/-/-/-/-/-)--------

-2 0 2

Solución: (-2 , 2)

b) $\left|x-3\right|<2$

$\left|x-3\right|=d\left(x\,,3\right)<2$

--------(-/-/-/-/-/-/-/-|-/-/-/-/-/-/-/-)-------

1 3 5

Solución: (1 , 5)

c) $|2x-3|\le\frac{1}{2}$

$$|2x-3| = \left|2\left(x-\frac{3}{2}\right)\right| = 2\left|x-\frac{3}{2}\right| \le \frac{1}{2}$$

luego $\left|x-\frac{3}{2}\right|\le\frac{1}{4}$ o sea $d\left(x\,,\frac{3}{2}\right)\le\frac{1}{4}$

Solución: $\left[\frac{5}{4}\,,\frac{7}{4}\right]$

-------[-/-/-/-/-/-/-/-/-|-/-/-/-/-/-/-/-/-]----------

$\frac{5}{4}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{7}{4}$

d) $|-2x+3|>2$

$$|-2\,x+3| = \left|-2\left(x-\frac{3}{2}\right)\right| = |-2|\cdot\left|x-\frac{3}{2}\right| = 2\left|x-\frac{3}{2}\right| > 2$$

luego $\left|x-\frac{3}{2}\right|>1$

o sea $d\left(x\,,\frac{3}{2}\right)>1$

-/-/-/-/-/-/-)---------|---------(-/-/-/-/-/-/-

$\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{5}{2}$

Solución: $\left(-\infty\,,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{5}{2}\,,+\infty\right)$

ACTIVIDADES

1) Calculá, si existen, los valores de **x** que satisfacen las siguientes ecuaciones:

a. $\left|\frac{3}{2}x\right| = 0$

b. $\left|-3x\right| = 6$

c. $|x-4| = 4$

d. $|x| = -5$

e. $|2x+1| = \frac{1}{3}$

f. $\left|-3x+2\right| = 4$

2) Resolvé las siguientes inecuaciones y escribí su solución en forma de intervalos.

a. $|x| < 2$

b. $|x-2| < \frac{1}{2}$

c. $\left|3x+4\right| \leq 5$

d. $\left|2x+1\right| > \frac{1}{4}$

e. $\left|-3x+2\right| \geq 1$

f. $\left|5x-1\right| > 4$

3) Utilizando el símbolo de valor absoluto; expresá cada una de las siguientes expresiones.

- x está a mas de 5 unidades de 8
- x está exactamente a 2 unidades de 10
- La distancia entre –3 y x es 2.
- x difiere de –2 en menos de $\frac{2}{3}$.

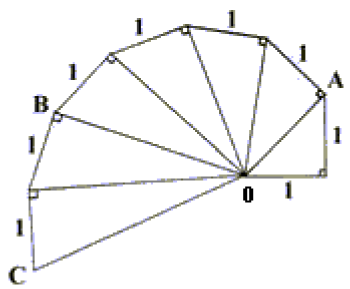
1) Encontrá el error en el siguiente razonamiento.

Sean a , b $\in$ R con a > b.

•	Si $c > 0$	$\Rightarrow$	$a = b + c$
•	Multiplicamos ambos miembros por $(a - b)$	$\Rightarrow$	$a (a - b) = (b + c) (a - b)$
•	Aplicamos propiedad distributiva	$\Rightarrow$	$a^2 - ab = ba - b^2 + ca - cb$
•	Pasamos *ca* al primer miembro	$\Rightarrow$	$a^2 - ab - ca = ba - b^2 - cb$
•	Sacamos factor común	$\Rightarrow$	$a (a - b - c) = b (a - b - c)$
•	Simplificamos	$\Rightarrow$	$a = b$

2) Si a , b $\in$ R analizá la validez de las siguientes afirmaciones.

•	Si $a < b$	$\Rightarrow$	$a^2 < b^2$
•	Si $a^2 < b^2$	$\Rightarrow$	$a < b$
•	Si $a > b$	$\Rightarrow$	$2 - \frac{1}{a} < 2 - \frac{1}{b}$
•	Si $a > 0$	$\Rightarrow$	$a^2 > a$



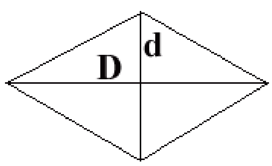
3) Dada la figura, calculá con aproximación de décimas:

(a) Las distancias $\overline{0A}$, $\overline{OB}$, $\overline{0C}$

(b) Los perímetros y las áreas de los triángulos de la figura

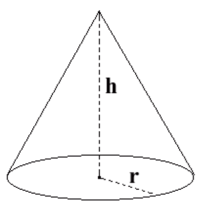
4) Si un electrón se mueve a razón de 3.10^{10} cm/seg. ¿Cuántos cm. viajará en 3.10^{-6} seg.?

5) Calculá el volumen de la Tierra, suponiéndola esférica, si su radio es de 6340 km. Si se calculara con un valor de radio de 6000 km, ¿qué error se estaría cometiendo?



6) ¿Entre qué valores está comprendida el área del rombo si sabemos que:

$$6,21 < D < 6,22 \quad y \quad 4,83 < d < 4,84$$



7) El volumen del cono está comprendido entre 1210 y 1215 cm^3. La altura h, verifica $12,6 < h < 12,9$ ¿Entre qué valores está comprendido el radio de la base?

8) Para una compañía que fabrica termostatos, el costo combinado de mano de obra y material es de \$ 125 por termostato. Los costos fijos (los costos de un período dado sin importar la producción) son de \$ 250000. Si el precio de venta de un termostato es de \$ 175 ¿cuántos deben venderse para que la compañía obtenga utilidades?

9) Un constructor debe decidir si alquila o compra una máquina excavadora. Si la alquila el gasto sería de \$6000 mensuales (con base en un año) y el costo diario (combustible, aceite, conductor) sería de \$600 por día que la utiliza. Si la compra, su costo fijo anual sería de \$40000 y \$800 por cada día que la usa. ¿Cuál es el mínimo de días que la tiene que usar para justificar el alquiler?

10) Un químico debe preparar 350 ml. de una solución compuesta por dos partes de alcohol y 3 de ácido. ¿Cuánto debe utilizar de cada una?

11) El peso total de una cápsula espacial es de 840 kg. Los dispositivos reguladores de la cápsula pesan el doble que la cápsula vacía, en tanto que el equipo de observación y registro de datos pesan la mitad. Calculá el peso de cada una de las partes.

12) El perímetro de un cuadrado es 12 cm más grande que el de otro cuadrado. Su área excede al área del otro en 39 cm^2. Calculá el perímetro de cada cuadrado.

13) Un estanciero vendió los $\frac{5}{7}$ de su tropilla de caballos; enseguida compró 12, teniendo entonces 48 caballos menos que al principio. ¿Cuántos caballos tenía antes de la venta?

14) Una persona invirtió parte de \$150000 al 12% anual y el resto al 8% anual. Si su rédito anual es de \$14560, ¿qué cantidad, según cada tasa de interés, invirtió?

AUTOEVALUACIÓN

1) Calculá, si existe, el conjunto solución de las siguientes ecuaciones

a) $(4x - 1)(x+2) = 0$

b) $1 - 3(2x-4) = 4(6-x) - 8$

c) $\dfrac{x}{x} = 1$

d) $\dfrac{3}{8} + \dfrac{1}{2x} = \dfrac{2}{x}$

2) Los lados paralelos de un trapecio miden 15 cm y 36 cm, respectivamente, y uno de los lados no paralelos 13 cm. Si el perímetro del trapecio mide 84 cm, calculá su altura.

3) La carga máxima de un camión es de 3500 kg. Sabiendo que en cada viaje transporta por lo menos 2800 kg, ¿cuántos equipos de 70 kg cada uno puede transportar en cada viaje?

4) Resolvé las siguientes inecuaciones, representá el conjunto solución en la recta y escribilo en forma de intervalo:

a) $3x + 1 > 4x - 3$

b) $|x - 5| \leq 3$

c) $|2x - 7| > 9$

d) $\dfrac{5}{x} < 4$

e) $\dfrac{3x}{x - 1} \leq 5$

f) $\begin{cases} 3 - x > -1 \\ 3x + 6 > 0 \end{cases}$

5) Indicá si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificá cada una de tus respuestas. En caso de ser falsas, indicá la respuesta correcta.

a) La ecuación $3(x - 1) - (1 - 2x) = x - 4$ no tiene solución.

b) El conjunto solución de la ecuación $2 + |3x - 1| = 2$ es $S = \left\{1\ ;\ \dfrac{1}{3}\right\}$

c) El conjunto solución de la ecuación $3x - \dfrac{2 - x}{5} = 2$ es $S = \left\{\dfrac{6}{7}\right\}$

d) El conjunto solución de la inecuación $1 + |3 - 2x| \geq 2$ es $S = (-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$

- **<u>NÚMEROS</u>** sirven para $\begin{cases} \text{contar, ordenar (Z)} \\ \text{expresar cantidades (Q)} \\ \text{operar, calcular (todos)} \end{cases}$

- **Racionales:** se expresan como cociente de enteros

  Q es un conjunto **<u>denso</u>**

> Entre dos números racionales existen siempre infinitos racionales

> Todo número racional se puede expresar con una fracción o con una expresión decimal y recíprocamente: toda expresión decimal corresponde a un número racional
> (ejemplos: $\frac{4}{5} = 0{,}8$; $\frac{1}{3} = 0.333\ldots$; $-20 = -\frac{20}{1} = -\frac{40}{2}$;)

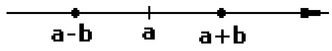
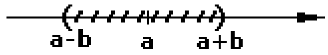
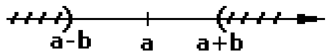
- **Irracionales:** no se pueden expresar como cociente de enteros (ejemplos: π , $\sqrt{2}$, e,…)

- **Reales: R $\cup$ I** Completan la recta.

> **Todo número real se puede representar con un punto de la recta y recíprocamente todo punto de la recta corresponde a un número real**

<u>Notación científica</u>: es la adecuada para expresar y calcular números muy pequeños o muy grandes.

<u>Aproximación decimal</u>: los números, tanto los racionales como los irracionales, en la práctica se expresan con unas pocas cifras significativas.

RELACIONES ALGEBRAICAS	VALOR ABSOLUTO
Identidad: igualdad algebraica cierta para cualquier valor de la variable que interviene. **Ecuación:** “propuesta” de igualdad. <u>Solucionar</u> una ecuación es responder a esa propuesta.	**$\|x-a\| = b \iff d(x,a) = b$** 
	$\|x-a\| < b \iff d(x,a) < b$ 
Inecuación: “propuesta” de desigualdad.	**$\|x - a\| > b \iff d(x,a) > b$** 

MÓDULO II: FUNCIONES

"Consideremos cómo están relacionados todos los sucesos. Cuando vemos el relámpago escuchamos el trueno; cuando oímos el viento miramos las olas del mar; en el otoño frío caen las hojas. En todas partes reina el orden, de manera que cuando observamos algunos fenómenos podemos preveer que otros se presentarán. El progreso de la ciencia consiste en observar estas mutuas dependencias y en mostrar, con paciente ingeniosidad, que los sucesos de este mundo que cambian constantemente no son sino ejemplos de unas pocas dependencias o relaciones generales llamadas <u>leyes</u> . Ver lo general en lo particular y lo constante en lo transitorio, es la meta del pensamiento científico".

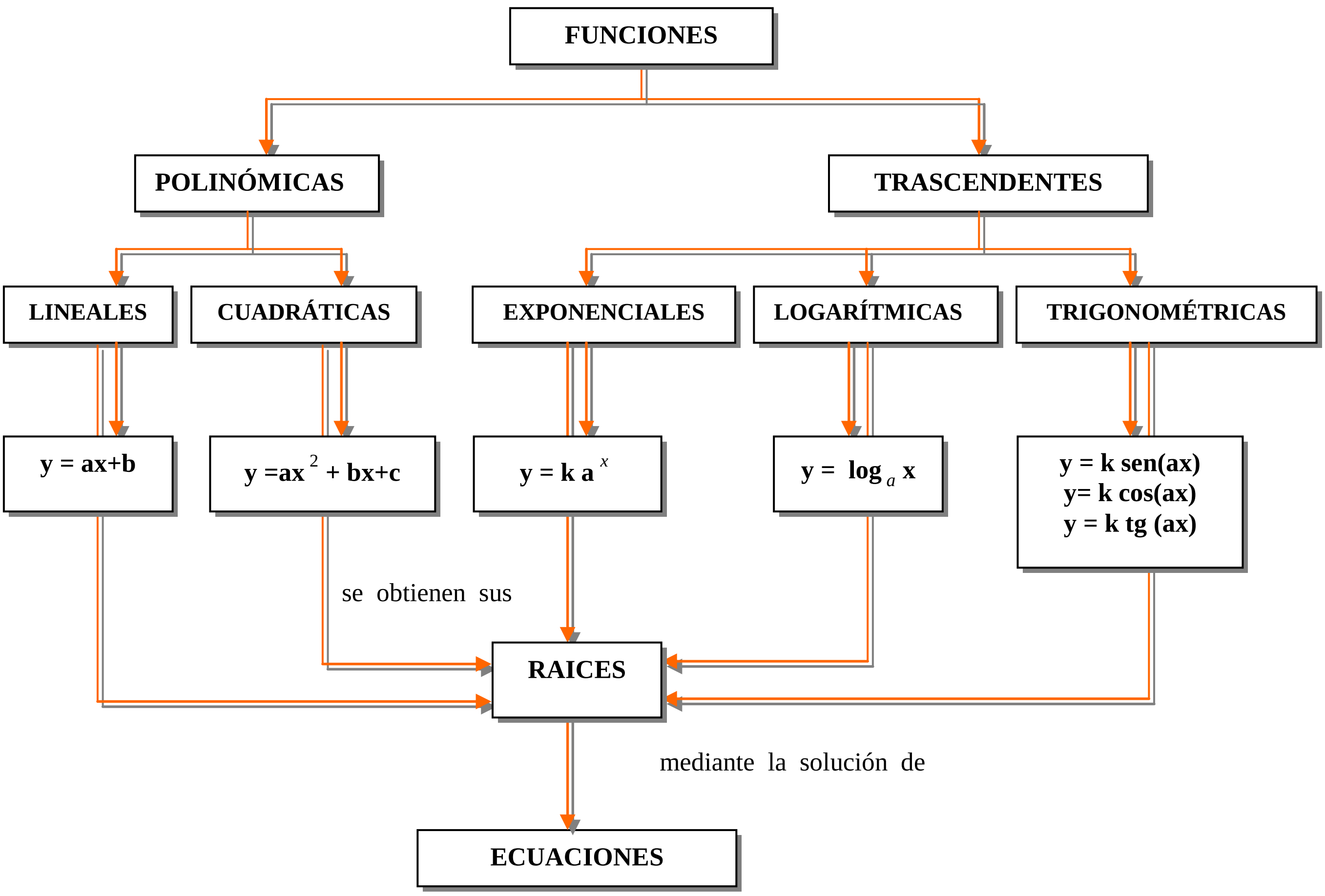
Alfred North Whitehead
(1861-1947)
Matemático y filósofo inglés

OBJETIVOS

Al concluir el módulo II estarás en condiciones de:

- Diferenciar relaciones funcionales de las que no lo son.
- Identificar el gráfico de una función con su expresión algebraica.
- Formular conjeturas sobre el comportamiento de una gráfica con relación al fenómeno que representa y/o su expresión algebraica.
- Valorar la utilidad del lenguaje gráfico para representar y resolver problemas de la vida cotidiana.

DIAGRAMA CONCEPTUAL



UN POCO DE HISTORIA

Leonhrad Euler. (15 de Abril 1707 -18 de Septiembre 1783) Nació en Basilea, Suiza. Fue hijo de un clérigo, que vivía en los alrededores de Basilea. Su talento natural para las matemáticas se evidenció pronto por el afán y la facilidad con que dominaba los elementos, bajo la tutela de su padre.

A una edad temprana fue enviado a la Universidad de Basilea. Alentado por su maestro, Jean Bernoulli, maduró rápidamente, y a los 17 años de edad, cuando se graduó Doctor, provocó grandes aplausos con un discurso probatorio, el tema del cual era una comparación entre los sistemas cartesiano y newtoniano.

A la edad de diecinueve años, envió dos disertaciones a la Academia de París, una sobre arboladura de barcos, y la otra sobre la filosofía del sonido. Estos ensayos marcan el comienzo de su espléndida carrera.

Por esta época decidió dejar su país nativo, a consecuencia de una aguda decepción, al no lograr un profesorado vacante en Basilea. Así, Euler partió en 1727, año de la muerte de Newton, a San Petersburgo,

En 1733 sucedió a su amigo Daniel Bernoulli, que deseaba retirarse, y el mismo año se casó con Mademoiselle Gsell, una dama suiza, hija de un pintor que había sido llevado a Rusia por Pedro el Grande.

Euler dio una muestra insigne de su talento, cuando efectuó en tres días la resolución de un problema que la Academia necesitaba urgentemente, pese a que se le juzgaba insoluble en menos de varios meses de labor. Pero el esfuerzo realizado tuvo por consecuencia la pérdida de la vista de un ojo. Pese a esta calamidad, prosperó en sus estudios y descubrimientos; parecía que cada paso no hacía más que darle fuerzas para esfuerzos futuros. Hacia los treinta años de edad, fue honrado por la Academia de París, como uno de sus miembros.

En 1741, el rey Federico el Grande invitó a Euler a residir en Berlín.
En 1766 Euler fue a San Petersburgo, para pasar allí el resto de sus días a los setenta y seis años de edad.

Sobre el origen del concepto de función existen distintas opiniones, mientras algunos autores admiten cierto carácter funcional en ciertas operaciones matemáticas de la antigüedad (en trabajos de los babilonios, de Ptolomeo o de los árabes), otros sitúan su nacimiento con la aparición de la geometría analítica (Descartes) y algunos ubican su auténtica aparición en pleno siglo XIX con las definiciones de funciones dadas por Dirichlet y por Lobatchevsky.

Pero si tuviéramos que fijar un período para el nacimiento del concepto de función, éste lo podemos ubicar en el siglo XVII, ya que influidos por los descubrimientos de Kepler y Galileo en relación con los cuerpos celestes, el estudio del movimiento fue el problema que más interesó a los científicos de ese siglo.

De estos estudios se obtuvo un concepto fundamental, que fue central en casi todo el trabajo de los dos siglos siguientes: el concepto de *función o dependencia de una cantidad respecto de otra(s).*

Entre los matemáticos que más contribuyeron al nacimiento y a los primeros planteamientos de este concepto se destacan :

- Newton (1642 – 1727) utilizó el término **fluyente** para cualquier relación entre variables.

- Leibnitz (1646- 1716) utilizó por primera vez la palabra **función** para indicar cantidades que dependían de una variable. También introdujo las palabras **constante, variable y parámetro.**

En el siglo XVIII encontramos al gran matemático Euler (1707—1783) quien, en una de sus aplicaciones, hace un detallado estudio del concepto y de otros términos relacionados con éste. Al definir las nociones iniciales se refiere a los términos **constante**, cantidad definida que toma siempre el mismo valor, y **variable,** cantidad indeterminada o universal, que comprende en sí misma todos los valores determinados. Utilizó por primera vez la notación f(x), que perdura en la actualidad.

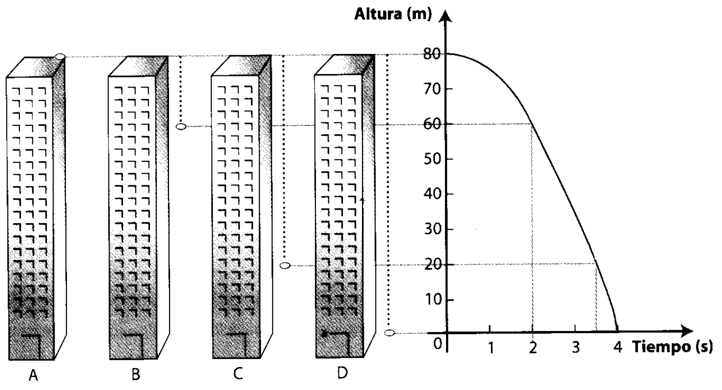
En el siglo XIX entre los aportes más importantes se encuentran los de Fourier con el estudio de las series trigonométricas y los de Dirichlet, quien fue el primero en utilizar sistemáticamente la función numérica como lo hacemos hoy : **a cada número "x" de un conjunto de números se le asocia otro número y = f(x).**

La introducción de la teoría de conjuntos permitió una generalización del concepto de función. Hasta ese momento, una función estaba definida siempre en cada punto del continuo de todos los valores reales o complejos o en cada punto de un intervalo dado. Pero al considerar una definición en términos conjuntistas, todas las definiciones corresponden a casos particulares de esta nueva generalización.

Como ocurrió a lo largo del tiempo, al estudiar diversos fenómenos sociales o de la naturaleza, surge con frecuencia la necesidad de considerar situaciones en que varias magnitudes variables están relacionadas entre sí, en el sentido de que los valores que toman algunas de ellas dependen de los valores de las demás.

SITUACIONES PROBLEMÁTICAS

1) Se deja caer una piedra desde el techo de un edificio de 80 m de altura y se desea describir cómo varía la altura de la piedra en relación con el tiempo, es decir, su posición desde que comienza a caer hasta que toca el piso.



- En cada instante "t" la piedra se encuentra a una altura "h", luego la **altura depende del tiempo.**

- La fórmula que describe esta situación es

$$h = h_o + v_o\, t - \tfrac{1}{2}\, g\, t^2 \qquad (1)$$

Donde:

h_o representa la altura desde donde se lanza el cuerpo y

v_o la velocidad inicial,

g es constante y representa la aceleración de la gravedad en el lugar:

$$g = 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cong 10 \text{ m/s}^2,$$

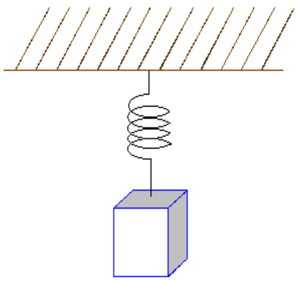
con los datos podemos escribir la fórmula (1) como:

$$h(t) = 80 - 5\, t^2$$

- Calculamos algunos valores y observamos la correspondencia con los datos del gráfico.

Tiempo (seg)	Altura (metros)
0	80
2	60
4	0

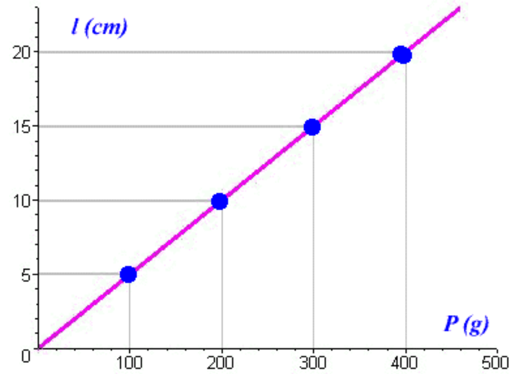
- Luego podemos concluir que la **posición** de la piedra se **relaciona** con el **tiempo "t" de caída.**



2) Si colgamos un resorte por un extremo y aplicamos un peso en el otro, se produce un alargamiento como se indica en la tabla.

Peso (g)	Alargamiento(cm)
100	5
200	10
300	15
400	20

- Representá los datos:
- Establecé, si existe, la relación entre peso (p) y alargamiento (l)



$$\frac{l_1}{p_1} = \frac{5}{100} = 0{,}05$$
$$\frac{l_2}{p_2} = \frac{10}{200} = 0{,}05$$
$$\frac{l_3}{p_{31}} = \frac{15}{300} = 0{,}05$$
$$\frac{l_4}{p_4} = \frac{20}{400} = 0{,}05$$

De las relaciones $l / p = 0.05$ concluimos que

$$\boxed{l = 0.05\, p}$$

Luego el alargamiento está en **correspondencia** con el peso aplicado.

¿?

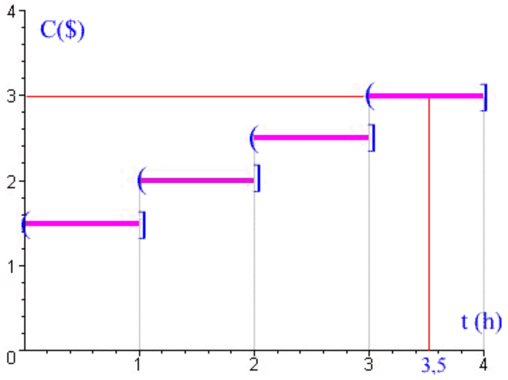
¿Es posible generalizar el resultado $l = k\, p$?

¿Se puede inferir de qué depende el valor de la constante *k?*

3) En una playa de estacionamiento figura la siguiente tarifa de precios:

1 hora o fracción	$ 1,50
Cada hora más o fracción	$ 0.50
Máximo 24 horas	$ 25

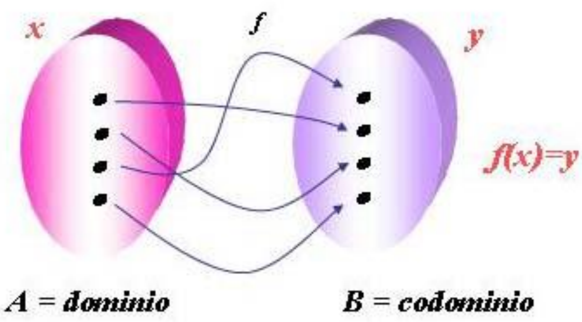
- Representá la gráfica de la relación costo – tiempo.
- Calculá el costo de estacionamiento por tres horas y media.



De la gráfica se infiere que el costo por estacionar 3,5 horas es de $ 3

De las consideraciones anteriores, podemos inferir que una función queda determinada por:

- Un conjunto llamado **<u>dominio.</u>**
- Un conjunto llamado **<u>codominio.</u>**
- Una **<u>ley</u>** que asocia a **cada elemento del dominio un único elemento del codominio.**



- En los ejemplos anteriores se han <u>relacionado</u> dos magnitudes: altura–tiempo; peso- alargamiento ; costo- tiempo.

- Estas se han representado sobre los <u>ejes de coordenadas o ejes cartesianos ortogonales.</u> Al eje horizontal se lo llama: **eje de las abscisas o eje de las x** ; al eje vertical: **eje de las ordenadas o eje de las y.** Al punto de intersección de los ejes se lo llama **origen de coordenadas.**

- Cada punto representado en ese sistema de ejes da información ordenada de la magnitud representada

- En las relaciones representadas a cada valor del eje horizontal le corresponde un **<u>único</u>** valor del eje vertical, entonces estas relaciones son **<u>funciones.</u>**

2.1.0 DEFINICIÓN DE FUNCIÓN

Dados dos conjuntos A y B una función f de A en B es una correspondencia que a cada elemento de A asocia un único elemento de B.

En el curso consideraremos, en general, funciones con **dominio** igual al conjunto de los **números reales o subconjuntos de R** y con **codominio igual a R.**

Con la notación,

$$f : A \rightarrow B \quad / \quad y = f(x)$$

(que se lee: *f de A en B tal que y es igual a f de x*), indicamos que la función f relaciona los elementos del conjunto *A(dominio*) con los elementos del conjunto *B (codominio)* según la fórmula $y = f(x)$.

Esta definición incluye conjuntos de elementos cualesquiera, numéricos y no numéricos.

2.1.1 DOMINIO

Dominio de f: es el conjunto formado por todos los valores que toma la variable independiente "x" y se simboliza: D_f .

☞ En el problema 1.- el dominio de la función es $D_f = [0,4]$.

2.1.2 CODOMINIO

Codominio de f: es el conjunto que contiene a todos los valores que puede tomar una función.

2.1.3 IMAGEN

Imagen de f: cada elemento "y" ∈ B que está asociado a un elemento "x" del dominio de f se llama imagen de x y se escribe "f(x)".

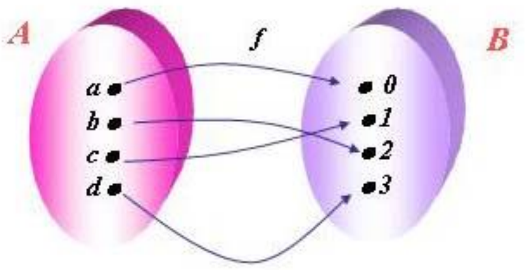
Se simboliza: $Im_f = \{ y \in B \,/\, \exists\ x \in A \,/\, f(x) = y\}$

☞ En el problema 1.- la imagen de la función *es* $Im_f = [0,80]$.

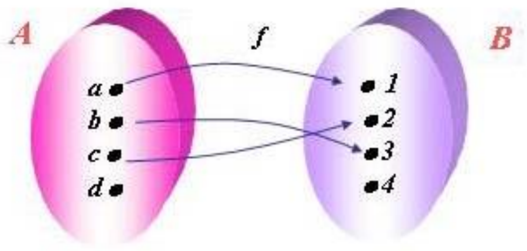
ACTIVIDADES

1) Analizá los siguientes diagramas (diagramas de Venn) e indicá cuáles de ellos corresponden a funciones de A en B. Justificá tu respuesta.

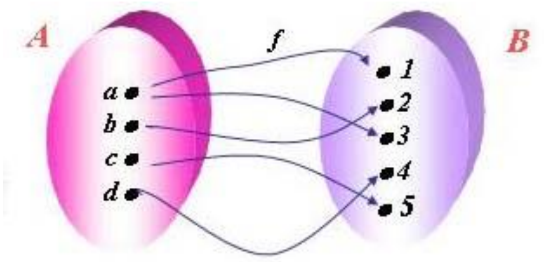
a.



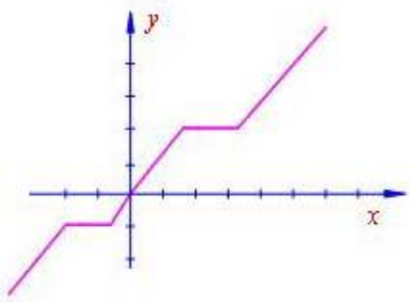
b.

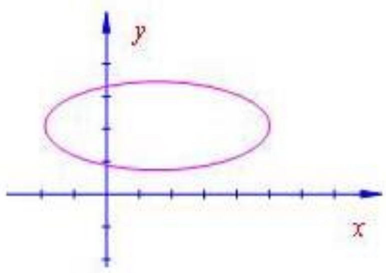


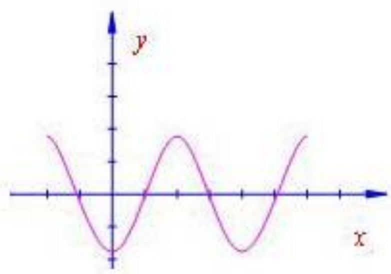
c.



2) Analizá los siguientes gráficos e indicá cuáles corresponden a funciones. Justificá tus respuestas.







2.2.0 DIFERENTES FORMAS DE REPRESENTAR UNA FUNCIÓN

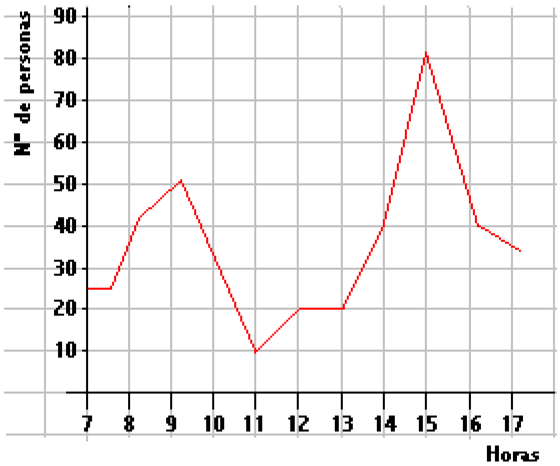
La relación entre las variables independiente y dependiente puede establecerse mediante: gráficas, tablas numéricas, textos, expresión algebraica,…

2.2.1 MEDIANTE GRÁFICAS

Para que la información obtenida de la gráfica sea precisa, es necesario tener en cuenta:

- La escala utilizada en cada eje.
- La información numérica o verbal que aparece en los ejes.

La gráfica representa la actividad en un andén de una estación de trenes desde las 7 horas a las 17 horas. Respondé las siguientes preguntas:



¿Cuántas personas están a las 7 h?.
¿Cuántas personas están a las 9 h?.
¿Cuántas personas están a las 15 h?.
¿A que hora la actividad es mayor?.
¿A que hora la actividad es la mínima?

2.2.2 MEDIANTE UN TEXTO

A partir de la lectura de un texto, en el que se relacionan dos magnitudes, podemos obtener una gráfica que permita visualizar la información

"Matías salió de su casa una mañana y bajó las escaleras en dos minutos. Al llegar a la calle tuvo que detenerse, pues se encontró con el semáforo en rojo. Poco después cruzó la calle en dirección al parque; allí comenzó a caminar cada vez más deprisa, hasta correr; cansado, al poco tiempo disminuyó la marcha y luego se sentó en un banco. Después del descanso, de regreso a su casa, la única parada la hizo para comprar el diario y conversar con el quiosquero."

Describí mediante una gráfica aproximada, que relacione tiempo – velocidad, la situación anterior.

2.2.3 MEDIANTE UNA TABLA DE DATOS

- Los datos se representan gráficamente eligiendo la escala adecuada.
- Si es posible, se intenta dibujar una curva que los aproxime.
- A partir de la curva se pueden calcular datos que no figuran en la tabla.

☞ La siguiente tabla muestra la estatura de un niño desde 0 a 5 años.

Edad (años)	0	1	2	3	4	5
Estatura (cm)	49	63	75	84	96	109

a) Representá gráficamente los datos.
b) ¿El crecimiento por año es uniforme?
c) ¿Hay alguna relación entre la estatura y la edad?
d) Realizá la gráfica con la misma escala en los dos ejes y comparala con la que se obtiene utilizando escalas distintas en cada eje.
e) ¿Cuál da la información más clara?

2.2.4 MEDIANTE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Hay una gran cantidad de funciones que pueden expresarse mediante una fórmula o expresión algebraica, que relaciona de forma exacta y sintética las variables.

Así en los primeros ejemplos expresamos:

1) $h = 80 - 5t^2$ entonces $h = f(t)$

2) $l = 0.05\,p$ entonces $l = f(p)$

Ventajas de la expresión algebraica

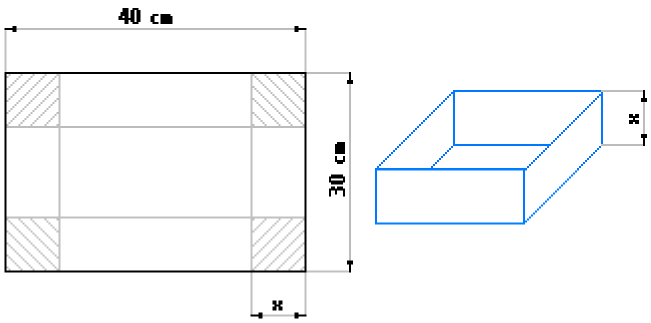
- Comodidad de expresión.
- Precisión en los cálculos.
- Posibilidad de recurrir a modelos conocidos y estudiados.
- Aplicación de métodos específicos para analizar las funciones y extraer gran cantidad de información.

1) Con un cartón de *40 cm* por *30 cm* se desea fabricar una caja, sin tapa, recortando cuadrados de igual lado, en las esquinas.

- Calculá el volumen de la caja en función del lado del cuadrado.
- ¿Cuál es el dominio de la función?.

SOLUCIÓN:

- Dibujamos un diagrama y asignamos una notación adecuada.
- Relacionamos las variables.



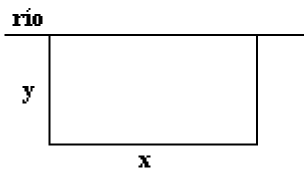
V = Superficie base x altura

Luego si $\begin{cases} Sup\ base = (40 - 2x)(30 - 2x) \\ altura = x \end{cases}$

Entonces $\boxed{\boldsymbol{V = (40 - 2x)(30 - 2x)\,x}}$

Los valores de "x" están comprendidos entre 0 y 15. ¿ Por qué?.

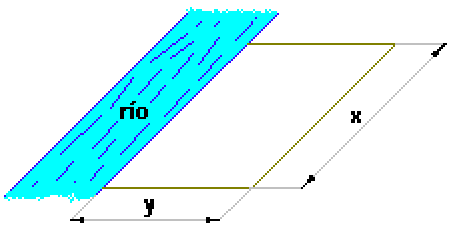
Luego $D_f = (0,15) = \{x \in R \,/\, 0 < x < 15\}$



2) Un lado de un terreno rectangular tiene como límite natural un río, y se utilizan *200 m* de alambre para cercar los otros tres lados. Si *"x"* es la longitud del lado del terreno paralelo al río:

- Expresá el área del terreno como función de *"x"*.
- Indicá el dominio de la función resultante.

SOLUCIÓN:



Dibujamos un diagrama y asignamos una notación adecuada:

x: lado paralelo al río.
y: lados no paralelos al río.

Relacionamos las variables.
Sabemos que se utilizan *200 m* de alambre para cercar el terreno, entonces

$$200 = x + 2y \qquad (1)$$

Tenemos que expresar el área del terreno:

$$\boldsymbol{A = x\ y} \qquad (2)$$

como función de *"x"*

- Despejamos *"y"* de (1)

$$200 - x = 2y \quad \Rightarrow \quad \frac{200 - x}{2} = y \quad ó \quad y = 100 - \frac{x}{2}$$

- Sustituímos en (2) y obtenemos

$$\boxed{A = x\left(100 - \frac{x}{2}\right)}$$

Luego el área del terreno como función de *"x"* es:

$$\boxed{A(x) = 100\,x - \frac{1}{2}x^2}$$

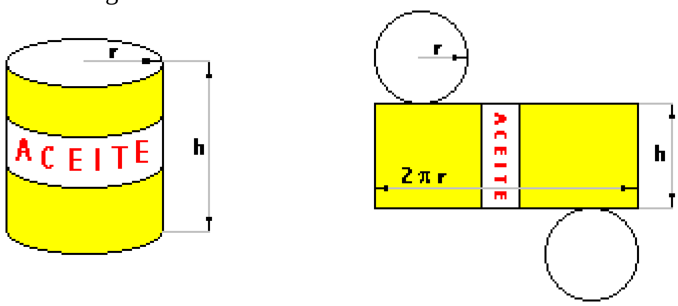
Como el área es positiva, el dominio de la función está dado por:

$$D_f = \{\ x \in R\ /\ 0 < x < 200\ \}$$

3) Una lata contiene un litro de aceite. El material de la base y la tapa cuestan $3{,}5\ \$ / cm^2$ y el lateral cuesta $2{,}8\ \$ / cm^2$. Expresá el costo de fabricación de la lata en función del radio de la base.

SOLUCIÓN:

Dibujamos un diagrama



- Asignamos nombre a las variables: *r*: radio; *h*: altura; *C*: costo

- Relacionamos las variables.

  El costo total dependerá de las superficies

  Sup. base = πr^2

  Sup. Lateral = $2\ \pi r h$

  y se puede expresar: C total $= C\ base\ .\ 2\ Sup.\ Base + C\ lat.\ S\ lateral$;
  sustituyendo los valores se tiene:

$$\boxed{C = 3{,}5\,(2\ \pi\ r^2) + 2{,}8\,(2\ \pi\, r\, h) \qquad (1)}$$

El volumen de la lata es $V = \pi r^2 h$

Como el volumen *es 1 litro = 1* $dm^3 = 1000\ cm^3$ entonces $1000 = \pi\ r^2\ h$

- Despejamos el valor de *h* $\Rightarrow$ $h = \dfrac{1000}{\pi r^2}$

- Sustituímos en (1); entonces se tiene:

$$C = 3{,}5\ (2\ \pi\ r^2\ ) + 2{,}8\ (2\ \pi\ r\ \ \frac{1000}{\pi r^2}\ )$$

Entonces la fórmula:

$$\boxed{C\ (r) = 7\ \pi\ r^2 + \frac{5600}{r}}$$

representa el costo de fabricación en función del radio.

GRÁFICOS DE FUNCIONES

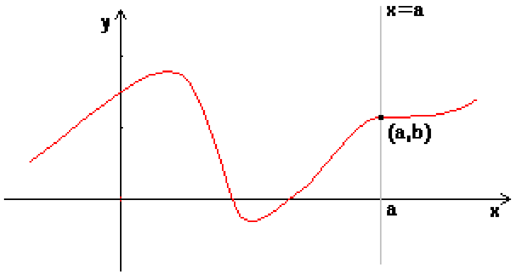
Nos interesa especialmente un grupo de funciones: aquellas cuyo dominio e imagen coinciden o están contenidos en el conjunto de los números reales, y reciben el nombre de **funciones reales de variable real.**

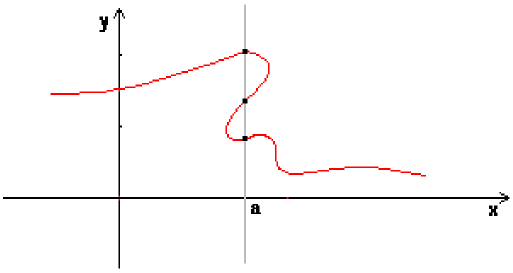
Si f es una función con dominio en A entonces la gráfica de f es el conjunto de pares ordenados $(x, y) = (x, f(x))$ con $x \in A$

DEFINICIÓN: Sea $D_f \subset R$, se llama **gráfica de f** al conjunto de puntos (x, y) del plano *donde* $x \in D_f$ e $y = f(x)$. Indicamos:

$$G(f) = \{ (x , f(x)) \ / \ x \in D_f \}$$

- La gráfica de una función siempre puede representarse de izquierda a derecha, nunca regresa hacia atrás, porque eso significaría que para un valor de la variable independiente existen varios valores de la variable dependiente, como se observa en las figuras

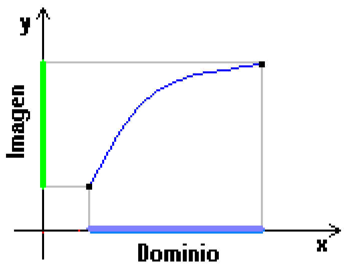


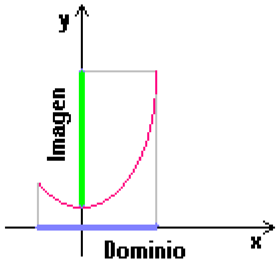


Prueba de la recta vertical

Una curva en el plano es la gráfica de una función si y sólo si ninguna recta vertical interseca a la curva más de una vez

- La gráfica también nos permite representar el dominio e imagen de f sobre los ejes coordenados, como se muestra en la figura

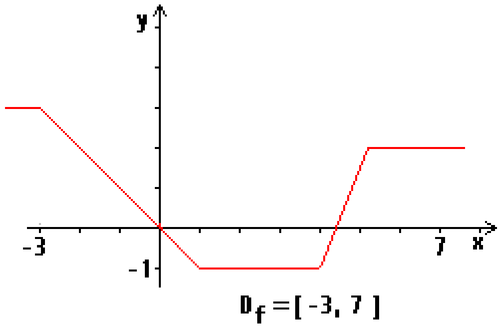




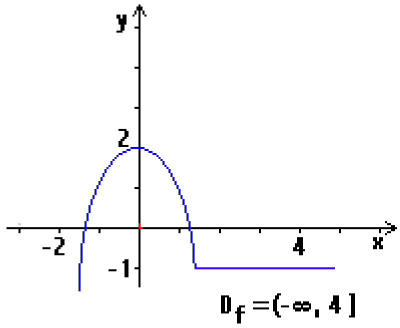
ACTIVIDAD

En cada uno de los siguientes gráficos de funciones, calculá la imagen de la función atendiendo al dominio indicado.

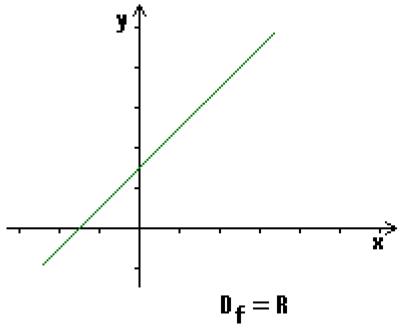
a.



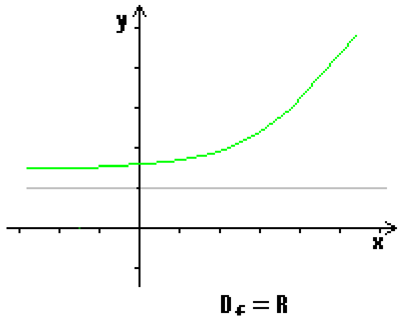
b.



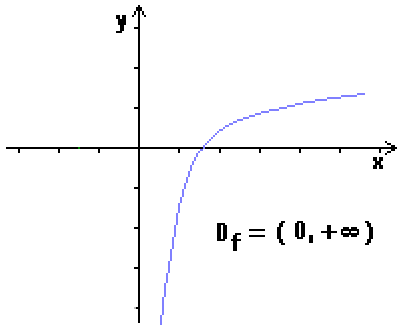
c.



d.



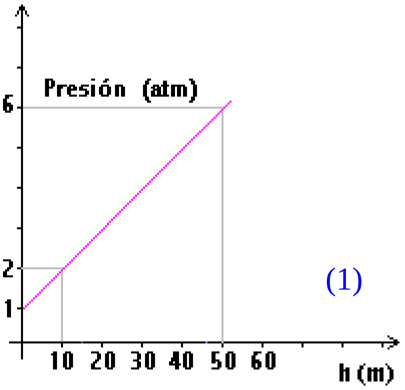
e.

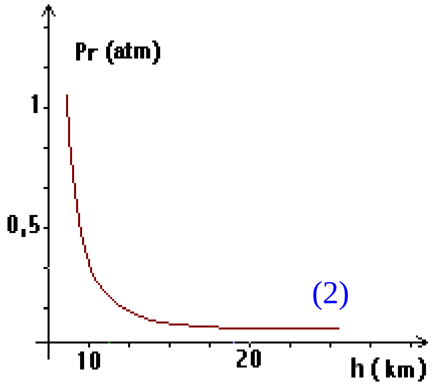


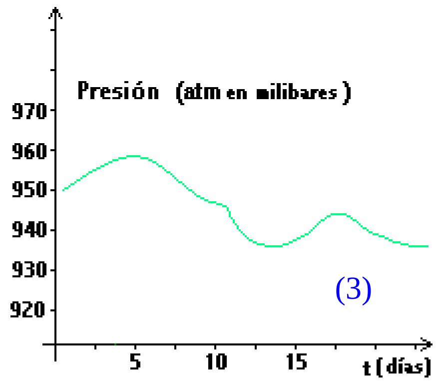
2.3.1 CARACTERÍSTICAS GLOBALES DE LAS GRÁFICAS

VARIACIONES DE UNA FUNCIÓN

Las siguientes gráficas muestran las variaciones de la presión atmosférica.





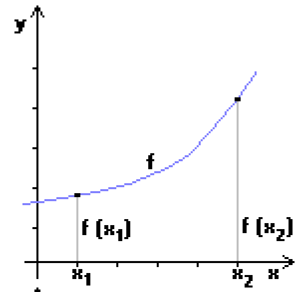
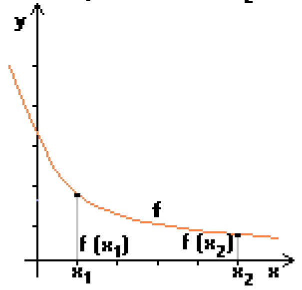


- En (1) se muestra cómo varía la presión al sumergirnos en el agua. Por cada *10m* que descendemos la presión **aumenta** una atmósfera (*1 atm*), luego la *p = f(h)* y es una función **creciente**.

- En (2) se muestra la variación de la presión atmosférica con la altura, en principio disminuye más rápidamente, luego *p = f(h)* y es una función **decreciente**

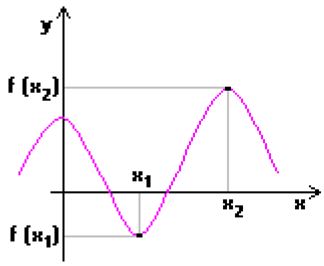
- En (3) se muestra la variación de la presión atmosférica en un cierto lugar, durante un período de 20 días, *luego p = f(t)*
  Presenta momentos donde **crece** y otros donde **decrece**, un valor **máximo**, el tercer día y otro **mínimo**, el día *10.*

2.3.2 FUNCIONES CRECIENTES Y/O DECRECIENTES

DEFINICIÓN	FORMA DE LA GRÁFICA
• *f* **crece** en un intervalo I si $f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ en I	
• *f* **decrece** en un intervalo *I* si $f(x_1) > f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ en I	

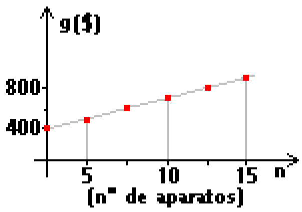
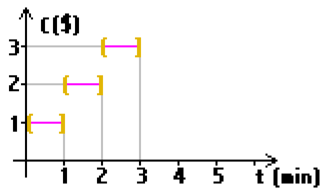
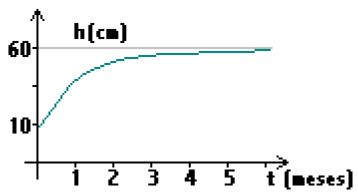
2.3.3 MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Alrededor de un **mínimo** la función pasa de ***decreciente a creciente*** y alrededor de un **máximo** pasa de ***creciente a decreciente.***

DEFINICIÓN	FORMA DE LA GRÁFICA
• ***f*** alcanza un **mínimo local** en x_1 si $f(x_1) \leq f(x)$ para todos los valores de x "próximos" a x_1 • ***f*** alcanza un **máximo local** en x_2 si $f(x_2) \geq f(x)$ para todos los valores de x "próximos" a x_2	

2.3.4 CONTINUIDAD – DISCONTINUIDAD

Analicemos las siguientes gráficas, que representan las situaciones problemáticas planteadas.

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA	GRÁFICA	OBSERVACIÓN
1) Las ganancias mensuales de un representante de computadoras son de $ 400 fijos, más $ 20 por cada aparato que vende, entonces la ganancia depende del número de aparatos vendidos. $g = f(n)$		La variable independiente sólo tiene sentido para los valores 0, 1,2 3,… pues no se puede vender un número fraccionado de computadoras.
2) El costo de una llamada diurna de larga distancia es de $ 0, 57 para el primer minuto y de $ 0,56 por cada minuto adicional (o fracción de minuto), entonces el costo depende del tiempo. $C = f(t)$		La variable independiente "t" varía en intervalos regulares de 1 minuto.
3) La gráfica muestra el crecimiento de una planta con el paso del tiempo, la altura depende del tiempo**.** $h = f(t)$		La variación es suave, sin saltos bruscos.

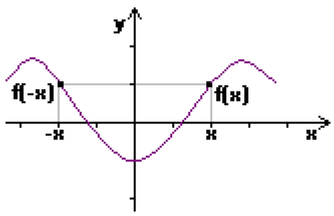
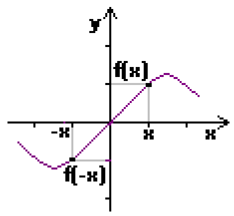
Estos ejemplos nos muestran que existen funciones discontinuas, como las que representan la primera y segunda situación problemática, o continuas, como la de la tercera.

- En la primera gráfica la variable independiente pasa de un valor a otro por saltos, la variable se llama **discreta** y la función no es una línea sino un conjunto de puntos..

- En la segunda gráfica, aunque la variable independiente es continua, la función presenta saltos, estos saltos son las discontinuidades de la función.

- En la tercera gráfica la función no presenta discontinuidades de ningún tipo.

2.3.5 FUNCIONES PARES E IMPARES

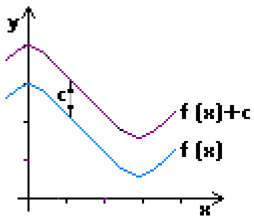
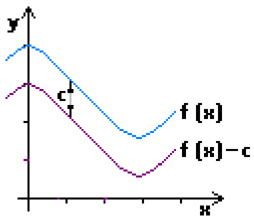
DEFINICIÓN	SIMETRÍA	FORMA DE LA GRÁFICA
• ***f*** **es <u>par</u> si** $f(x) = f(-x)$ $\forall\ x \in D_f$	La gráfica de la función es **simétrica respecto del eje y.**	
f **es <u>impar</u> si** $f(x) = -f(-x)$ $\forall\ x \in D_f$	**La gráfica de la función es simétrica respecto al origen.**	

2.3.6 TRANSFORMACIONES DE FUNCIONES

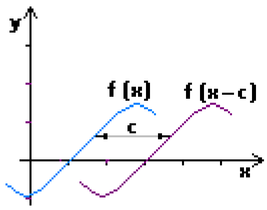
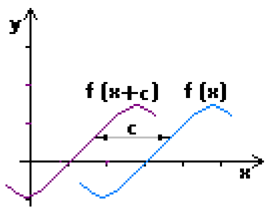
Si conocemos la gráfica de y = f(x) vamos a analizar cómo ciertas transformaciones modifican su gráfica, en particular, estudiamos

- **DESPLAZAMIENTOS** $\begin{cases} \text{verticales} \\ \text{horizontales} \end{cases}$

- ***DESPLAZAMIENTO VERTICAL DE LAS GRÁFICAS.***

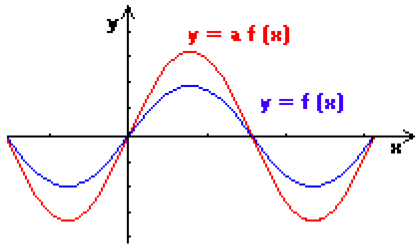
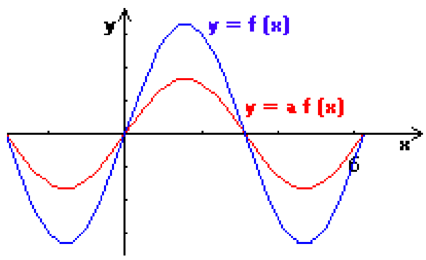
<table>
<tr><th>DEFINICIÓN</th><th>COMO OBTENER LA GRÁFICA</th><th>APARIENCIA DE LA GRÁFICA</th></tr>
<tr><td>$y = f(x) + c$
$(c>0)$</td><td>La gráfica se desplaza “c” unidadeshacia arriba</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$y = f(x) - c$
$(c>0)$</td><td>La gráfica se desplaza “c” unidades hacia abajo</td><td>
</td></tr>
</table>

- ***DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL DE LAS GRÁFICAS.***

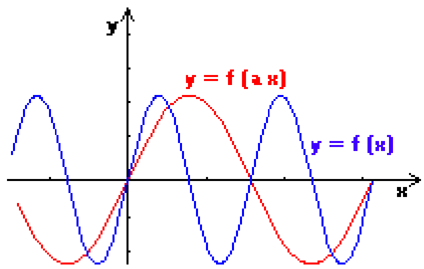
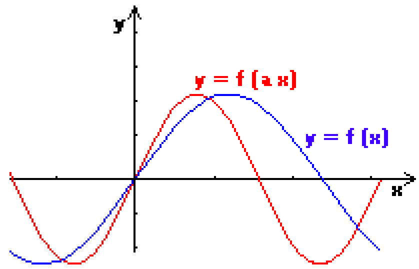
<table>
<tr><th>DEFINICIÓN</th><th>COMO OBTENER LA GRÁFICA</th><th>APARIENCIA DE LA GRÁFICA</th></tr>
<tr><td>$y=f(x-c)$</td><td>La gráfica se desplaza “c” unidades hacia la derecha</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$y = f(x+c)$</td><td>La gráfica se desplaza “c” unidades hacia la izquierda</td><td>
</td></tr>
</table>

- **EXPANSIONES / COMPRESIONES** $\begin{cases} \text{verticales} \\ \text{horizontales} \end{cases}$

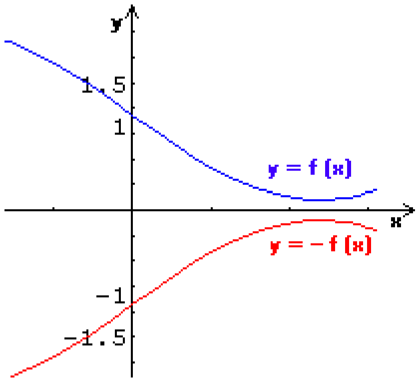
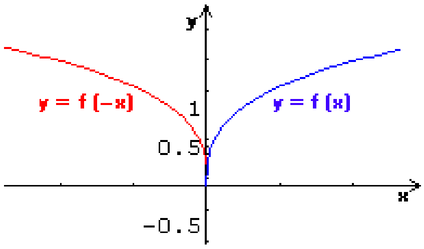
- *EXPANSIONES / COMPRESIONES VERTICALES*

DEFINICIÓN	COMO OBTENER LA GRÁFICA	APARIENCIA DE LA GRÁFICA
$y = a\ f(x)$ $a > 1$	La gráfica se expande verticalmente en un factor a "a"	
$y = a\ f(x)$ $0 < a < 1$	La gráfica se comprime verticalmente en factor igual a "a"	

- *EXPANSIONES / COMPRESIONES HORIZONTAL*

DEFINICIÓN	COMO OBTENER LA GRÁFICA	APARIENCIA DE LA GRÁFICA
$y = f(a\,x)$ $a > 1$	La gráfica se comprime horizontalmente.	
$y = f(a\,x)$ $0 < a < 1$	La gráfica se expande horizontalmente.	

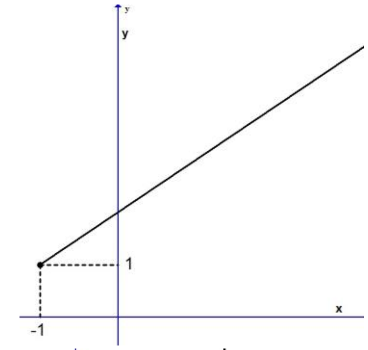
- ***REFLEXIONES***

DEFINICIÓN	COMO OBTENER LA GRÁFICA	APARIENCIA DE LA GRÁFICA
$y = -f(x)$	La gráfica se refleja respecto del eje x	
$y = f(-x)$	La gráfica se refleja respecto del eje y	

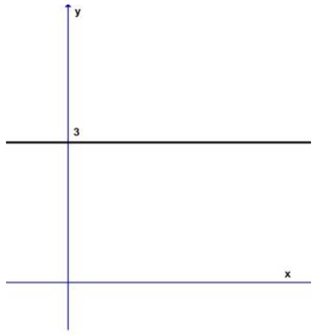
ACTIVIDADES

1) Determiná si las siguientes gráficas corresponden a funciones o no. En caso afirmativo, indicá dominio e imagen.

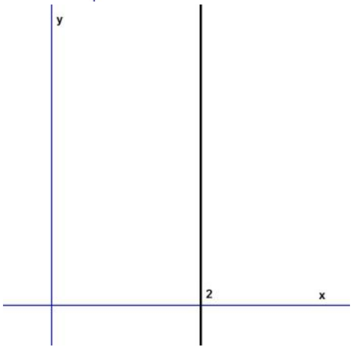
a)



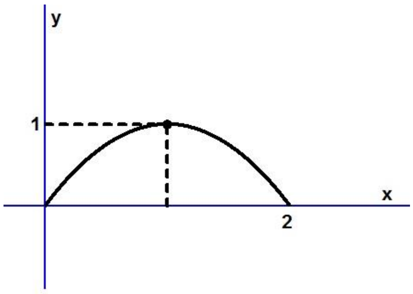
b)



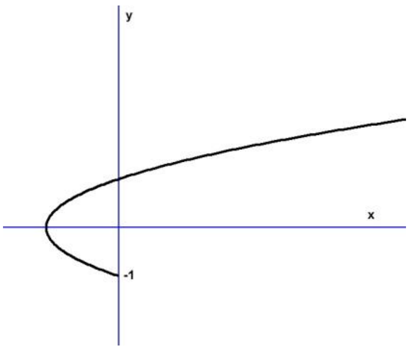
c)



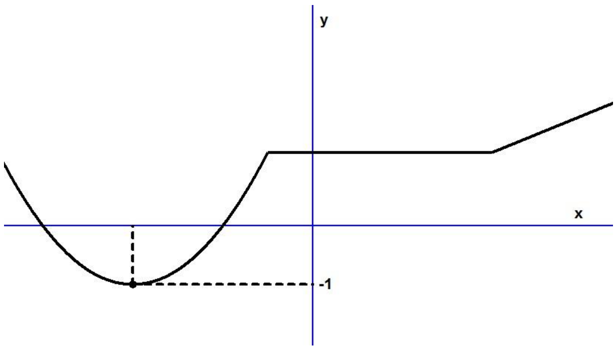
d)



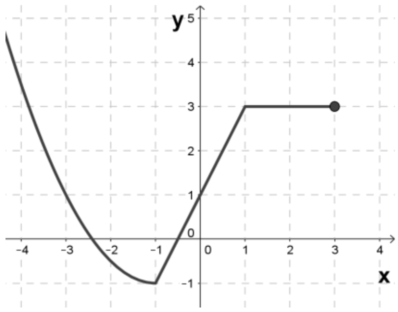
e)



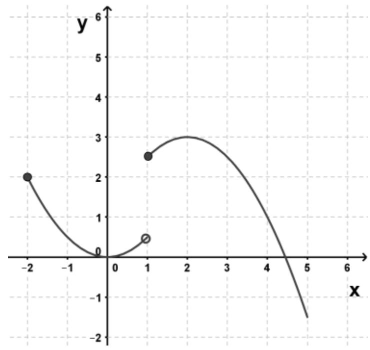
f)



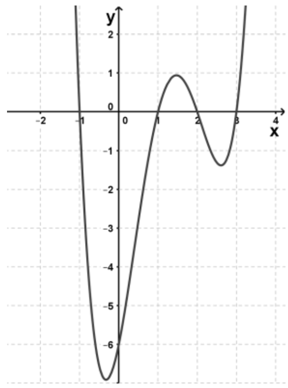
2) En cada caso, dada la gráfica de la función "f":



Función 1



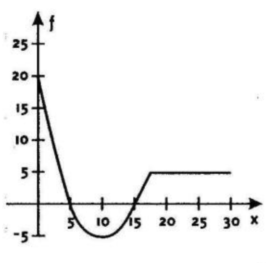
Función 2

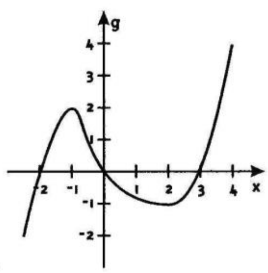


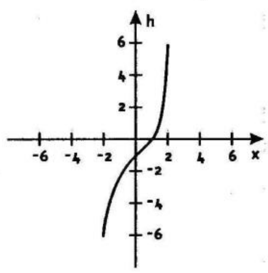
Función 3

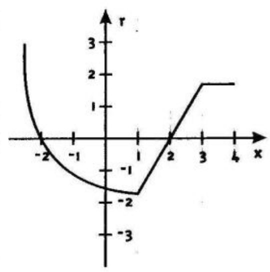
a) Determiná dominio e imagen.
b) Calculá *f(-1); f(0); f(1); f(3)*
c) Indicá los intervalos donde crecen y donde decrecen. En el caso de existir, encontrá los máximos/mínimos.

3) Analizá las características pedidas para cada función graficada:









Dom *f* = …………. Im *f* = ………….

Crecimiento de *f*: ………………………………

Máximos de *h:* ………. Im *h* = ……….

Ceros de *g*: ……………………………………..

Dom *g* = ………. Mínimos de *g*: ……….

Ordenada al origen de *g*: …………

Dom *r* = ………   Decrecimiento de *r*: ………………………………

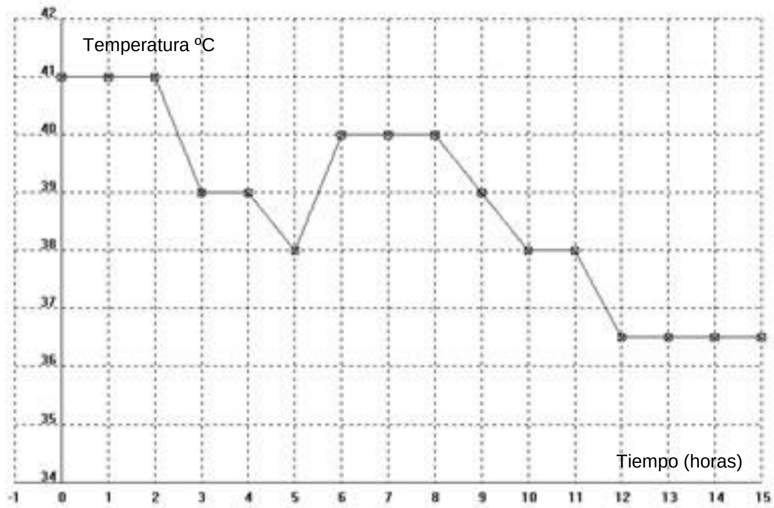
f(0) = ……… *g*(2) = ………   *r*(4) = ………

f(x) = 10 si x = ……   *r*(x) = 0 si x = ……

Escribe dos pares ordenados que pertenezcan a *g* que tengan la misma imagen: …………………

Escribe dos pares ordenados que pertenezcan a *r* que tengan imágenes opuestas: ………………...

4) La siguiente gráfica describe la evolución de la temperatura de un paciente con el paso del tiempo:



a) En términos del problema, identificá cuál es la variable independiente y cuál es la variable dependiente. ¿Qué unidades se toman en cada uno de los ejes?

b) Si se considera normal una temperatura de 36,5º C, ¿cuántas horas estuvo enfermo el paciente?

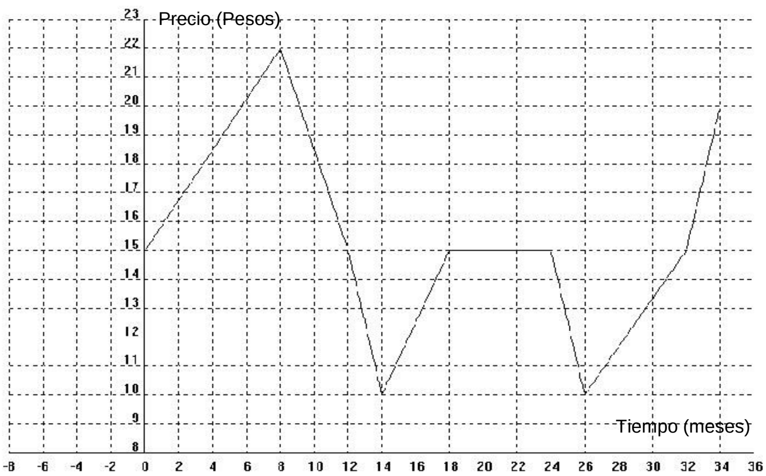
c) ¿Qué significa que la gráfica contenga al punto (5, 38)?

d) ¿Qué significan los tramos decrecientes?

e) ¿En qué períodos su temperatura ha sido estable?

f) ¿Cuándo es máxima la temperatura? ¿Cuándo es mínima?

5) El departamento de marketing de una empresa importadora hizo un estudio de la variación del precio de uno de sus productos y confeccionó el siguiente gráfico:



a) En términos del problema, identificá la variable independiente y la variable dependiente.

b) ¿Cuánto tiempo duró la investigación?

c) ¿Entre qué valores varió el precio en el período analizado?

d) ¿Qué significa que la gráfica contenga al punto (26,10)

e) Estimá f(6) e interprétala en términos del problema.

f) ¿En qué momento el precio fue de $15?

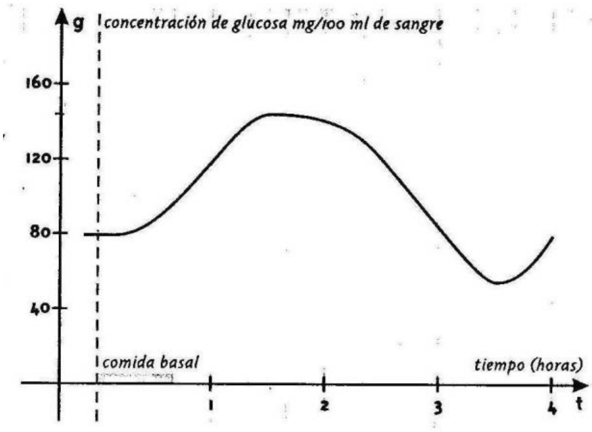
g) ¿Cuál es la ordenada al origen? ¿Qué significa en términos del problema?

h) ¿Qué significan los tramos decrecientes? Indícalos.

i) ¿El precio se mantuvo constante en algún momento? Si tu respuesta es afirmativa, indicá cuándo.

j) ¿Cuál fue el precio más alto que alcanzó el producto en el período estudiado? ¿En qué momento se observó?

6) Después de ingerir una comida rica en carbohidratos, la concentración de glucosa en la sangre se eleva. El gráfico muestra cómo nuestro organismo regula la cantidad de glucosa.



a) Identificá cuál es la variable independiente y cuál es la dependiente.

b) ¿Qué significa para el problema el par (0,80)? ¿y matemáticamente?

c) ¿Tiene raíces esta función? ¿Qué indica esto en términos del problema?

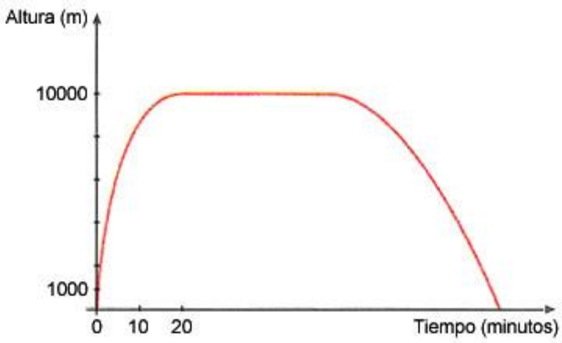
d) ¿Qué dominio tiene la función graficada? ¿cuál es su imagen?

e) Completá e interpretá el significado en el problema:

(1;___) (___; 145)

f) Indicá los intervalos de crecimiento. ¿Cómo los interpretarías en términos del problema?

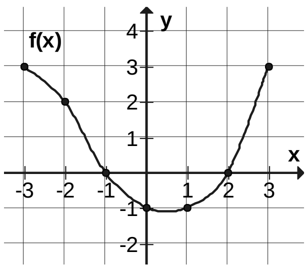
7) Una aerolínea registró la altura a la que vuela un avión que parte de un aeropuerto ubicado a nivel del mar, durante un viaje. Lo representaron de la siguiente manera:



a) Si el avión parte de un aeropuerto que está a 1000 metros de altura respecto del nivel del mar y realiza un viaje en las mismas condiciones, ¿cómo será el gráfico de la función que vincula el tiempo y la altura respecto del nivel del mar?

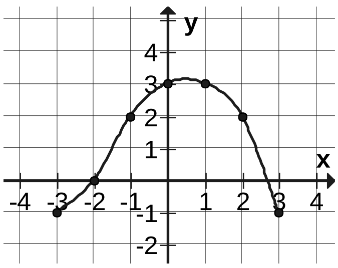
b) ¿Cómo será el gráfico de otro avión que sale desde el nivel del mar y realiza un viaje en las mismas condiciones pero parte veinte minutos más tarde que el primer avión?

8) Asociá gráfico con expresión, sabiendo que la gráfica de la función “f” es la siguiente:

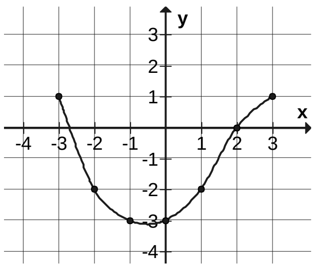


i. *y = f(x)-2* **ii.** *y = f(x-2)* **iii.** *y = - f(x) +2* **iv.** *y = f(- x) - 2*

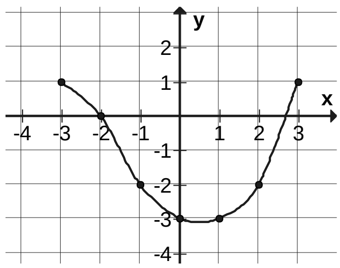
a)



b)



c)



9) La gráfica de una función “f” se muestra en la figura. A partir de la misma dibujá la gráfica de:

a) *y = f(x-2).*

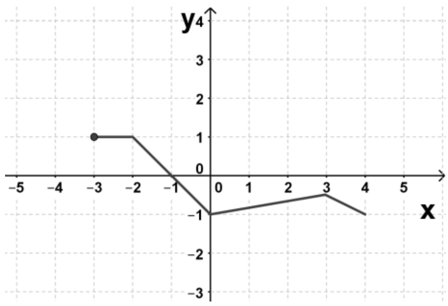
b) *y = f(x) – 2.*

c) *y = 2 f(x).*

d) *y = f(-x).*

e) *y = 3 – f(x) .*

f) *y = ½ f(x+ 1).*



10) A partir de la expresión de la función “f” dada, encontrá la expresión que represente las transformaciones detalladas:

a) $f(x) = x^2$ desplazada hacia arriba tres unidades y dos unidades hacia la derecha.

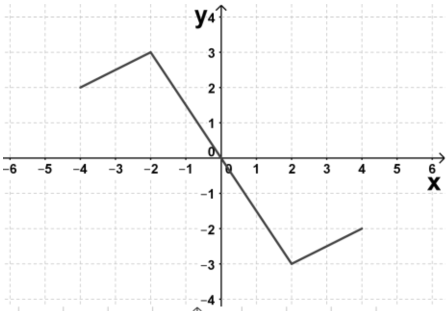
b) $f(x) = x^3$ alargada verticalmente en un factor dos y desplazada una unidad hacia la izquierda.

c) $f(x) = \sqrt{x}$ reflejada sobre el eje X y desplazada hacia abajo dos unidades.

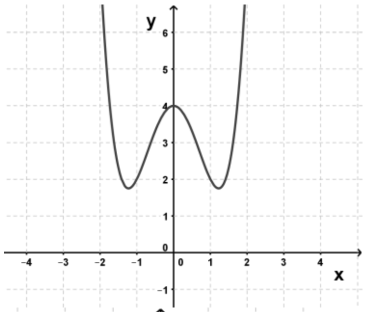
d) $f(x) = sen(x)$ acortada verticalmente a la mitad y reflejada con respecto al eje Y.

11) Determiná si las siguientes funciones son pares, impares o ninguna de las dos opciones:

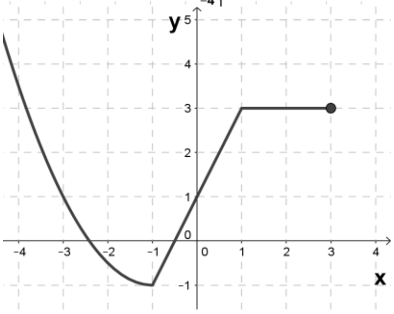
a)



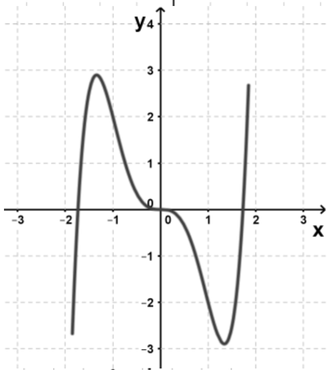
b)



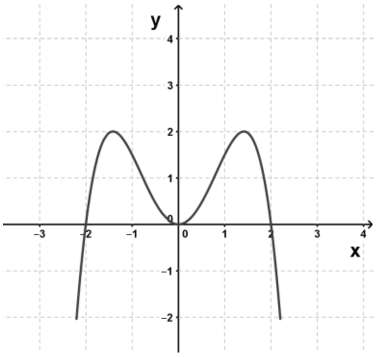
c)



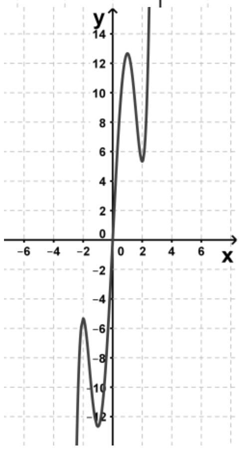
d)



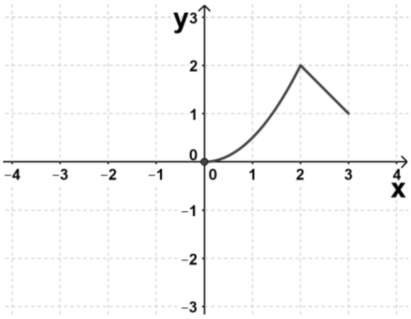
e)

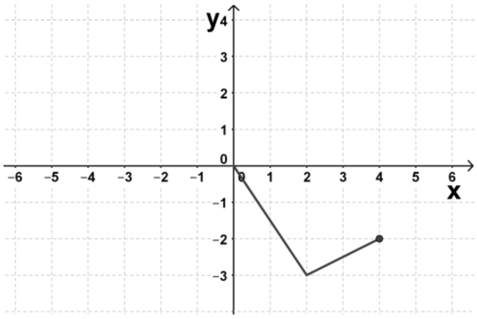


f)



12) Completá los siguientes gráficos para que correspondan a funciones pares y luego para que correspondan a funciones impares:





13) En cada caso, realizá el gráfico de una función "f" que cumpla con las condiciones pedidas:

a) Dom f = $\left[-4,5\right]$ Im f = $\left[-3,6\right]$

Máximo: $\left(-1,3\right)$ Mínimo: $\left(2,-3\right)$

f(-3) = f(0) = f(4) = 0

f es creciente en $\left(-4,-1\right)$ y $\left(2,5\right)$

b) Corta al eje de abscisas en x = - 5, x = -1, x = 2.

Creciente: $\left(-\infty,-3\right)\cup\left(1,+\infty\right)$

Decreciente: $\left(-3,1\right)$

c) Es una función par .
Ordenada al origen 3.
f(3) = -1 y f(- 2) = 0

d) Es una función impar .
Ordenada al origen 0.
f(2) = -1 y f(- 3) = 2

Cada representación gráfica que hiciste, ¿es única? ¿por qué?
Completá el análisis del gráfico que confeccionaste teniendo en cuenta todos los elementos estudiados: crecimiento, decrecimiento, máximos, mínimos, continuidad, paridad.

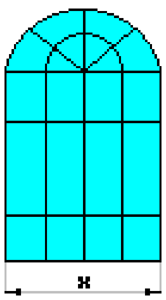
14) Para cada uno de los siguientes enunciados, escribí una fórmula que represente a la función e indicá cuál es su dominio:

a) Un rectángulo tiene un perímetro de 20 cm. Expresá el área A del rectángulo como una función de la longitud de uno de sus lados.

b) Expresá el área A de un triángulo equilátero como una función de la longitud del lado.

c) Expresá el radio de un círculo como una función de su área.

d) La suma de al longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo es 80 cm. Encontrá la función que da la superficie de ese triángulo dependiendo de la longitud de su base.



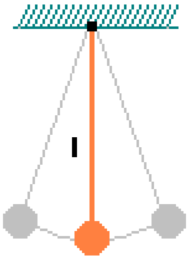
e) Una ventana normanda tiene la forma de un rectángulo con un semicírculo sobrepuesto. Si el perímetro de la ventana es de 12 m, expresá el área de la ventana como una función del ancho de la misma.

f) Un envase cilíndrico tiene una altura igual al triple de su radio R. Determiná la expresión su superficie lateral en función de R.

g) Un tanque de acero para gas tiene una forma de cilindro recto de 3 metros de altura, con una semiesfera unida a cada extremo. Expresá el volumen del tanque como una función del radio de la circunferencia base del cilindro.

h) Un recipiente de almacenamiento de base rectangular, sin tapa, tiene 10 m^3 de volumen. La longitud del largo de su base es el doble del ancho. El material de la base cuesta $10 por metro cuadrado, y el de los lados, $6 por metro cuadrado. Expresá el costo de los materiales en función del ancho de la base.

i) Dos barcos zarpan simultáneamente de un puerto. Uno navega hacia el sur a 22km/h y el otro hacia el este a 30 km/h. Expresá la distancia entre los barcos como una función del tiempo (en horas) transcurrido desde su salida.



j) El período de un péndulo (tiempo transcurrido en una oscilación completa) varía directamente con la raíz cuadrada de la longitud del mismo. Expresá simbólicamente esta relación. ¿Cuánto se debe modificar la longitud del péndulo para duplicar el período?

k) La presión P de una muestra de gas es directamente proporcional a la temperatura T e inversamente proporcional a su volumen V. Escribí las fórmulas que expresen estas relaciones.

l) Un cable de 10 metros de longitud se cortará en dos partes. Con una de ellas se construirá un cuadrado y con la otra un círculo. Expresá el área total encerrada por el cable en función de la longitud del lado del cuadrado.

15) Determiná si las siguientes funciones tienen el dominio que se indica. Justificá tu respuesta.

a) $f(x) = 2x^2 + 4$ $\qquad D_f = \mathbb{R}$

b) $f(x) = \dfrac{2x+3}{5-2x}$ $\qquad D_f = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{5}{2}\right\}$

c) $f(x) = \dfrac{5}{x^2-9}$ $\qquad D_f = \mathbb{R} - \{3\}$

d) $f(x) = \sqrt{3-x}$ $\qquad D_f = [3, +\infty)$

e) $f(x) = \sqrt{(x+1).(5-x)}$ $\qquad D_f = [-1, 5]$

f) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x-3}}$ $\qquad D_f = [3, +\infty)$

g) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}$ $\qquad D_f = [1, +\infty)$

h) $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)\cdot\sqrt{x+3}}$ $\qquad D_f = (-3, 3) \cup (3, +\infty)$

i) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3+2x^2}{4-x^2}}$ $\qquad D_f = (2, +\infty)$

j) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\left|\frac{1}{2}x-1\right|-3}}$ $\qquad D_f = (-\infty, -4) \cup (8, +\infty)$

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA 1

Se sabe que cada 32 metros de profundidad bajo la tierra, la temperatura aumenta un grado. Si en la superficie la temperatura es de 10ºC.

a) Encontrá la fórmula que relaciona la profundidad con la temperatura.
b) Un agua termal que sale a 79ºC ¿De que profundidad proviene?.
c) Graficá.

SOLUCIÓN:

$$Llamamos \begin{cases} T = temperatura \\ h = profundidad \end{cases}$$

a) De acuerdo con los datos, sabemos que por cada *32* metros de profundidad, la temperatura aumenta un grado. Entonces:

$$\boxed{T = \frac{1}{32} h}$$

Como la temperatura *T* en la superficie es de *10ºC* la fórmula final es:

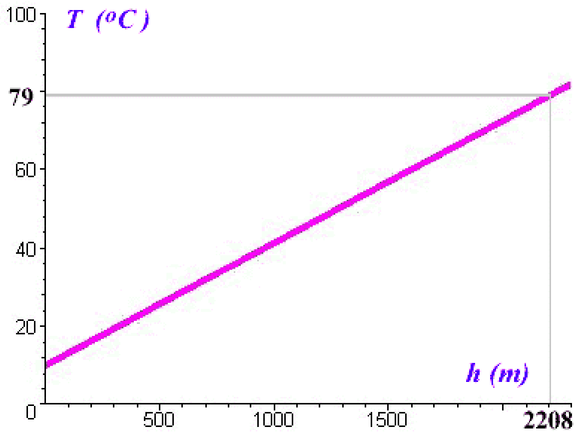
$$\boxed{T = 10 + \frac{1}{32} h}$$

b) Si *T = 79 ºC* , ¿Cuál será el valor de *h*?

$$79 = 10 + \frac{1}{32} h \longrightarrow 69 = \frac{1}{32} h \rightarrow$$

$$h = 2208 \text{ metros}$$

c) El aumento es uniforme, la gráfica de la función es una recta.



La función que utilizamos en el problema anterior es una función lineal y su fórmula es:

$$T(h) = 10 + \frac{1}{32}h$$

Entonces, una función lineal se expresa por la fórmula:

$$f(x) = ax + b \qquad con \quad a\ y\ b\ \in R.$$

Una función lineal es una función $f : R \to R$ ***de la forma:***
$f(x) = ax + b$ con a y b $\in$ a R

El ***dominio*** de la función lineal es el conjunto de los números reales.

La ***gráfica*** de una función lineal es una recta del plano, y recíprocamente, toda recta del plano que ***no*** es perpendicular al eje *x*, es la gráfica de una función lineal.

Un punto $P_o(x_o, y_o)$ pertenece a la recta de ecuación $y = ax + b$ si y sólo si sus coordenadas verifican $y_o = ax_o + b$.

Así en la gráfica del problema anterior el punto *(2208 , 79)* pertenece a la recta porque verifica la ecuación dada.

En cambio el punto *(0 , 20)* no pertenece a la recta, reemplazándolo en la ecuación se obtiene:

$$T = 10 + \frac{1}{32}h \quad \to \quad 20 = 10 + \frac{1}{32}\cdot 0$$

$$\therefore 20 \neq 10$$

¿?

¿ Las rectas paralelas al eje *y*, son funciones lineales?.

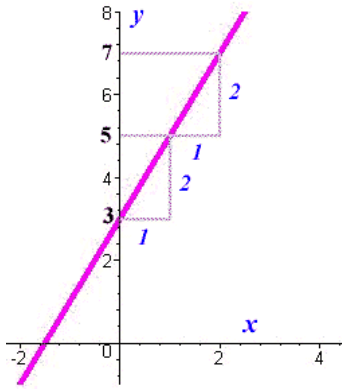
2.4.2 PENDIENTE Y ORDENADA EN EL ORIGEN

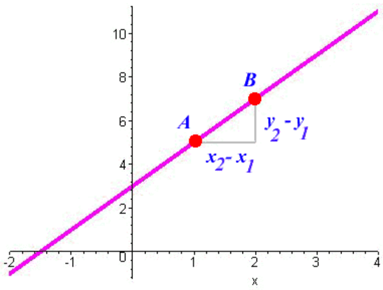
Consideremos la gráfica de $y = 2x + 3$.

En la figura marcamos los puntos *(0,3), (1, 5) ; (2,7).* Se puede observar que en todos los casos que:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 2$$

Siendo *2* el valor de *"a"* correspondiente a la recta.



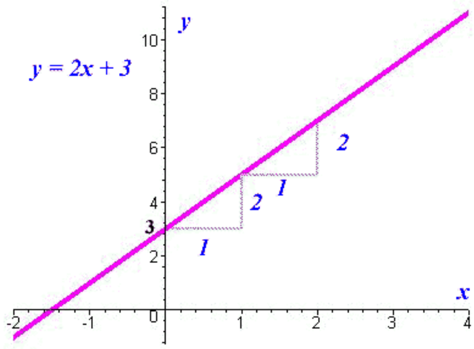


Al valor $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a$ *se lo llama* ***pendiente*** *de la recta e indica la inclinación de la recta respecto al eje x positivo.*

Gráficamente el valor de ***a*** indica lo siguiente:

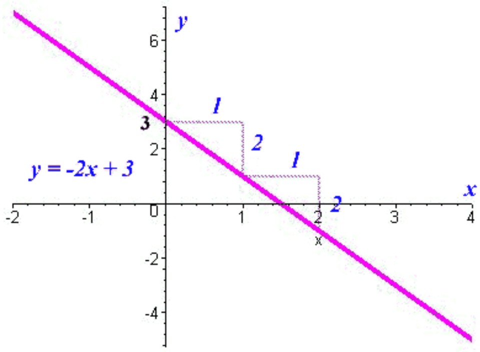
¿?

Si los valores de la ordenada son iguales por cada unidad que se desplaza, "x" hacia la derecha:



a = 2

Los valores de *y* varían dos unidades hacia arriba por cada unidad que aumenta *x.*



a = - 2

Los valores de *y* varían dos unidades hacia abajo por cada unidad que aumenta *x.*

Gráficamente "a" indica la cantidad de unidades que se desplaza la ordenada y (hacia arriba o hacia abajo) por cada unidad que se desplaza la abscisa x hacia la derecha.

La función definida por:

$$f(x) = ax + b \quad es \quad \begin{cases} creciente & si \quad a > 0 \\ decreciente & si \quad a < 0 \\ constante & si \quad a = 0 \end{cases}$$

- La recta de ecuación $f(x) = ax + b$ corta al eje y en y en el punto $(0\ ,b)$, es decir, $f(0) = b$, el coeficiente " b" recibe el nombre de ***Ordenada en el origen.***

¿?

¿ Por qué es tan importante la función lineal?.

- Los valores de a y b se llaman ***parámetros*** y para cada recta tienen un valor determinado. Si variamos el valor de estos parámetros se obtienen las distintas rectas.

- Si $b=0$, las ecuaciones $y = a\ x$ representan rectas que pasan por el origen de coordenadas. Estas funciones se llaman ***funciones de proporcionalidad.***

- Como $\frac{y}{x} = a$, esto indica que la relación entre x e y es ***constante***, es decir, x e y son ***proporcionales*** y el número *"a"* es la ***relación de proporcionalidad***.

2.4.3 FORMAS DE LA ECUACIÓN DE LA RECTA

No siempre se conocen la ***pendiente*** y la ***ordenada al origen***; los datos que se tienen pueden ser dos puntos, o un punto y la pendiente. Analizamos como se obtiene su ecuación en estos casos.

a.- SE CONOCEN DOS PUNTOS DE LA RECTA.

Consideremos la siguiente situación:

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA 1

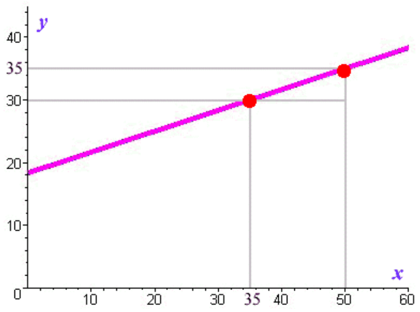
Un fabricante de zapatos coloca en el mercado 50 (miles de pares) cuando el precio es de \$ 35 (pesos por par) y de 35 cuando cuestan \$ 30.
Determiná la ecuación de la oferta suponiendo que el precio y la cantidad se relacionan linealmente.

SOLUCIÓN:

Asignamos nombres a los datos

Precio (y)	Cantidad (x)
\$35	50
\$30	35

De la gráfica correspondiente obtenemos:



$$a = \frac{y_1 - y_o}{x_1 - x_o} \qquad a = \frac{35-30}{50-35} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \qquad \boxed{a = \frac{1}{3}}$$

Luego $\quad y = ax + b \quad \rightarrow \quad y = \frac{1}{3}x + b$

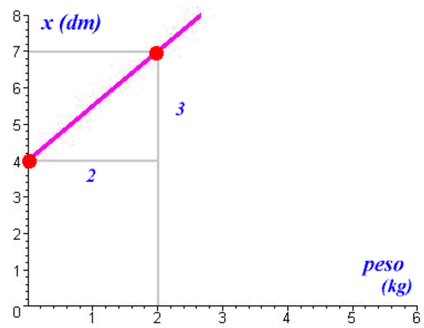
Calculamos *"b"* sustituyendo las coordenadas de un punto:

$(35\ ,30) \in recta \Rightarrow 30 = \frac{1}{3} \cdot 35 + b$ transponiendo los términos nos queda:

$$30 - \frac{35}{3} = b \quad \Rightarrow \quad \frac{90-35}{3} = b \quad \Rightarrow \boxed{b = \frac{55}{3}}$$

La ecuación que rige la oferta será:

$$\boxed{y = \frac{1}{3}x + \frac{55}{3}}$$



b.- SE CONOCE LA PENDIENTE Y UN PUNTO DE LA RECTA

Consideremos la siguiente situación

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA 2

Un resorte que cuelga del techo, mide 4 dm. Si se cuelga un peso en su extremo libre, el resorte se estira proporcionalmente al peso aplicado. Si colgamos un peso de 2 kg, observamos que se estira 3 dm llegando a medir 7 dm.

Determiná la ecuación del alargamiento del resorte en función del peso colgado.

SOLUCIÓN:

Graficamos según los datos, y observamos que la pendiente es $a = \frac{3}{2}$, como la longitud inicial es de *4 dm*, y conocemos el punto *(0 ,4).*

Luego expresamos: $y = ax + b$

Según los datos $y = \frac{3}{2}x + b \Rightarrow \ 4 = \frac{3}{2} \cdot 0 + b \quad \Rightarrow \quad \boxed{b = 4}$

Luego:

$$\boxed{y = \frac{3}{2}x + 4}$$

En general para calcular la ecuación de la recta que pasa por $P_o(x_o, y_o)$ y posee pendiente ***a***, se tiene:

Si $P_o(x_o, y_o) \in recta$

$\Rightarrow y_o = ax_o + b$

despejando el valor de *"b"*

$\Rightarrow b = y_o - ax_o$

$y = ax + y_o - ax_o \Rightarrow$

$y = a(x - x_o) + y_o$

c.- SE CONOCEN LOS PUNTOS DE INTERSECCIÓN CON LOS EJES COORDENADOS.

Consideremos la siguiente situación:

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA 3

*La demanda del mercado de un artículo que se vende a un precio **p** por unidad, está dado por la ecuación:*

$$\frac{p}{10}+\frac{q}{30}=1\,.$$

1) Verificá que la expresión $q = f(p)$ es una función lineal.

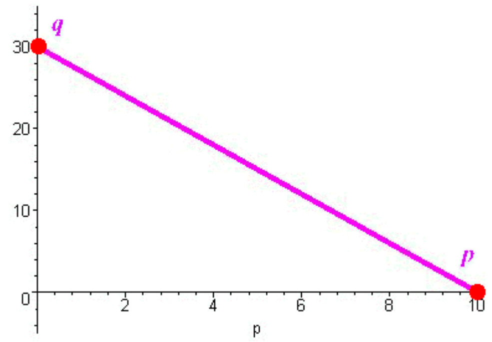
2) Graficá e interpretá económicamente los resultados.

SOLUCIÓN:

1) Despejando el valor de ***q*** se obtiene:

$$\frac{q}{30}=1-\frac{1}{10}p \Rightarrow \boxed{q=30-3p}$$

Luego la ecuación corresponde a una recta de *pendiente –3* y de *ordenada en el origen 30*.



El valor del precio más alto es *$10*, pero a ese precio nadie demanda el artículo.

La mayor cantidad de unidades demandas es *30*, pero es un valor ficticio ya que corresponde a un precio de *$ 0*, y el artículo no sale al mercado a ese precio.

A modo de síntesis

La ecuación de la recta que:

- pasa por los puntos $P(x_o,y_o)$ y $P(x_1,y_1)$ es:

$$y=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}*(x-x_o)+y_o$$

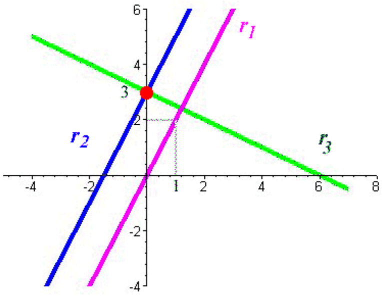
- pasa por $P(x_o,y_o)$ y tiene pendiente ***a es:***

$$y=a(x-x_o)+y_o$$

- corta al eje *x* en ***a*** y al eje *y* en ***b*** es:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

2.4.3 RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES



En la figura se puede observar que las rectas:

- r_1 y r_2 tienen igual inclinación, por lo tanto ***son paralelas***
- r_1 y r_3 , igual r_2 y r_3 que se cortan en ángulo recto, luego ***son pependiculares***

ECUACIÓN DE LAS RECTAS

- Las rectas r_1 y r_2 tienen igual pendiente $\boldsymbol{a = 2}$; además

  r_1 tiene ordenada en el origen igual a 0 → $\boxed{y = 2x}$

  r_2 tiene ordenada en el origen igual a 3 → $\boxed{y = 2x + 3}$

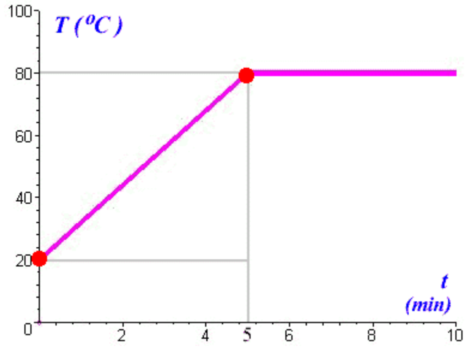
- La recta r_3 tiene pendiente de signo contrario a r_1 y r_2 y su valor es $a = -\frac{1}{2}$, como la ordenada en el origen es 3. Luego, la ecuación será

$$\boxed{y = -\frac{1}{2}x + 3}$$

En síntesis

Las rectas $y = a_1 x + b_1$ ***y*** $y = a_2 x + b_2$ ***son:***

- ***paralelas si*** $a_1 = a_2$
- ***perpendiculares***, si $a_1 = -\dfrac{1}{a_2}$



Las siguientes situaciones describen fenómenos utilizando funciones lineales por tramos.

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA 1

La gráfica muestra como evoluciona la temperatura ***T*** *de un líquido con el paso del tiempo.*
Calculá la fórmula que representa la evolución de la temperatura en función del tiempo.

La parte de la gráfica que corresponde a $0 \leq t \leq 5$ es una recta con ordenada en el origen en *20* y la pendiente igual

$$a = \frac{80-20}{5-0} = \frac{60}{5} = 12$$

$$\therefore T(t) = 20 + 12t \qquad \text{si} \qquad 0 \leq t \leq 5$$

La parte de la gráfica que corresponde a $t>5$ es una recta horizontal de ecuación:

$$T(t)=80$$

Luego la fórmula de la función se expresa de la siguiente manera:

$$T(t) = \begin{cases} 20+12t & si \quad 0 \leq t \leq 5 \\ 80 & si \quad t > 5 \end{cases}$$

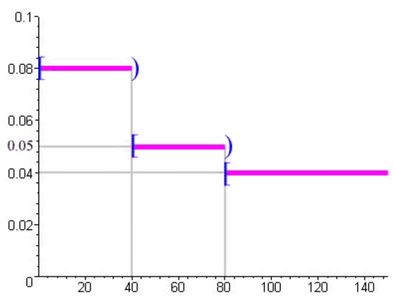
> **¿?**
>
> ¿Cuánto vale $T(1)$; $T(3)$; $T(5)$; $T(7)$?
>
> Para calcular $T(1)$ utilizaremos: $T(t) = 20 + 12t$ porque $1 < 5$, luego $T(1) = 20 + 12 = 32$.
>
> Idem para calcular $T(3)$ y $T(5)$.
>
> $T(3) = 20 + 12 \times 3 = 20 + 32 = 52$.
>
> $T(5) = 20 + 12 \times 5 = 20 + 60 = 80$
>
> Para calcular $T(7)$ se utiliza $T(t)=80$ porque $7>5$, luego $T(7)=80$.

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA 2

En un negocio donde se hacen fotocopias, el precio por unidad depende del número de copias; hasta 40 copias el precio es de \$ 0,08 cada una; de 41 a 80 copias es de \$0,05 y mas de 80 copias es de \$0,04 cada una.

a.- Graficá la función que da el costo en función de la cantidad de copias.
b.- Escribí la expresión algebraica de la función.

a.-



b.-

$$C(x) = \begin{cases} 0{,}08 & si \quad 0 \leq x < 40 \\ 0{,}05 & si \quad 41 \leq x < 80 \\ 0{,}04 & si \quad x \geq 81 \end{cases}$$

ACTIVIDADES

1) Dadas las rectas de ecuación:

i. $y = 2x - 3$ **ii.** $y - 5 = -3x$

iii. $y = x$ **iv.** $3x - 2y - 7 = 0$

v. $x = -2$

a) Determiná:
- $\rightarrow$ La pendiente.
- $\rightarrow$ La ordenada al origen.
- $\rightarrow$ Las intersecciones con los ejes de coordenadas.

b) Representá gráficamente.

2) Una presa está construida sobre un río para tener un embalse. El nivel del agua (medido en metros) es una función del tiempo (en años) desde que la presa se construyó, y está dado por la fórmula: $N(t) = 1,4 \cdot t + 8,5$.

a) ¿Cuál es la variable independiente y que representa? ¿y la variable dependiente?

b) Graficá la situación y determiná Dominio e Imagen.

c) ¿Qué representan la pendiente y la ordenada al origen en términos del problema?

d) ¿Cuántos años deben transcurrir para que el nivel de agua sea de 12, 7 metros?

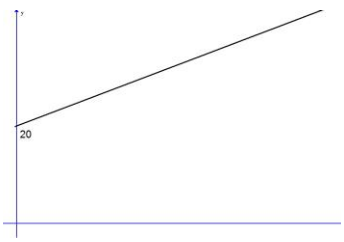
e) ¿Es verdad que a los 10 años se espera que el embalse se vacíe? ¿Por qué?

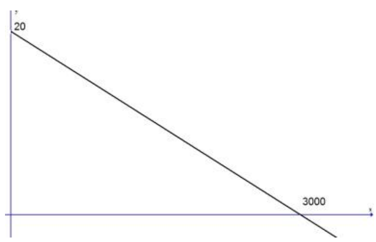
3) Un grupo de meteorólogos estudió la temperatura T (en grados centígrados) en función de la altura h respecto del nivel del mar (en metros) en una determinada región. Después de una fatigosa cantidad de mediciones para distintas alturas entre 0 metros y 15000 metros, han podido determinar la fórmula que vincula a estas dos variables: $T(h) = 20 - \frac{1}{150} h$.

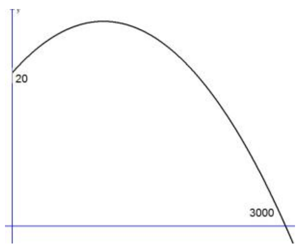
a) ¿Cuál es la variable independiente y que representa? ¿y la variable dependiente?

b) Teniendo en cuenta las condiciones del estudio, ¿qué dominio consideraron lo científicos para esta función?

c) Indicá cuál de las siguientes gráficas representa a la función T(h). Justificá tu elección.







A partir de la gráfica que consideraste correcta, determiná el conjunto Imagen de T. ¿Qué información proporciona este conjunto para el estudio meteorológico?

d) ¿Cuál es la temperatura a 240 metros sobre le nivel del mar? ¿y a los 600 metros?

e) ¿Es cierto que a los 1500 metros de altura se espera tener una temperatura de 11º C? ¿Por qué?

f) ¿Cuál es la variación de temperatura por cada metro que asciende? ¿y por cada kilómetro?

g) ¿A qué altura le corresponde una temperatura de 1º C bajo cero?

h) Hallá los ceros, conjuntos de positividad y negatividad de la función. Interpretá los resultados en términos de la investigación de los meteorólogos.

4) Dada la recta: $2x - 4y + 3 = 0$ indicá si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando cada una de tus respuestas.

a) Su pendiente es $\frac{3}{4}$ y su ordenada al origen es $\frac{1}{2}$.

b) Es paralela a la recta que pasa por los puntos $(-3,1)$ y $(3,4)$.

c) Su gráfico corta al eje x en $x = \frac{3}{2}$.

d) Su gráfico pasa por el punto $\left(-1, \frac{5}{4}\right)$

5) En cada caso, escribí la ecuación de la función lineal que cumple con las condiciones dadas:

a) Pasa por $(-2,3)$ y tiene pendiente – 2.

b) Pasa por el origen y tiene pendiente $\frac{2}{5}$.

c) Tiene pendiente 4 e intersección con el eje *y* en – 3.

d) Tiene intersección con el eje *x* en – 3 y con el eje *y* en 5.

e) Es paralela a la recta $y = 4$ y pasa por el punto $(1,-5)$

f) Pasa por $(3,1)$ y es paralela a la recta $3x + y - 1 = 0$

g) Es perpendicular a la recta que pasa por $(1,1)$ y $(2,3)$, y pasa por el origen de coordenadas.

6) En cada caso, calculá el número real *k* tal que la recta: $6x + ky + 5 = 0$

a) Tenga ordenada al origen igual a – 3.

b) Sea paralela al eje *y*.

c) Sea paralela a la recta $x - 2y + 10 = 0$.

7) Calculá el valor de k para que las rectas $L_1 : kx + (k+1)y + 3 = 0$ y $L_2 : 3x - 2y - 11 = 0$ sean:

a) Paralelas.

b) Perpendiculares.

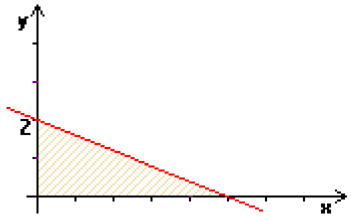
8) Determiná, gráfica y analíticamente, si los puntos $A(-3,-1)$, $B(3,3)$ y $C(-9,8)$ son vértices de un triángulo rectángulo.

9) Indicá si los puntos $D(-2,3)$, $E(5,-4)$ y $F(1,0)$ están alineados. Justificá tu respuesta.

10) Calculá el área del triángulo formado por los ejes de coordenadas y la recta $3x + 2y - 6 = 0$.

11) Encontrá la ecuación de la mediatriz del segmento $\overline{AB}$, siendo $A(4,-4)$ y $B(-2,6)$.

(Observación: La mediatriz de un segmento es la recta perpendicular que se traza en su punto medio)



12) Dada la recta $y = mx + 2$, calculá el valor de *"m"* para que el área de la figura sea igual a *16.*

13) Si $r(t) = 3t + 2$ describí la distancia recorrida por un móvil que se desplaza con movimiento rectilíneo uniforme, determiná:

a) La distancia recorrida por otro móvil que se desplaza a igual velocidad y que está dos unidades de distancia adelantado.

b) La distancia recorrida por otro móvil que se desplaza al doble de la velocidad y en el instante t = 0 se encuentra en el mismo punto que el primero.

c) La distancia recorrida por otro móvil que se desplaza con la misma velocidad pero en sentido contrario y parte en t = 0 del mismo punto que el primero.

d) Representá en un sistema de coordenadas cada situación.

14) A medida que el aire seco se eleva, se expande y se enfría. Si la temperatura a nivel del suelo es de 20º C y a una altitud de 1 km es de 10º C:

a) Expresá la temperatura (en °C) en función de la altitud (en km), suponiendo que la expresión es lineal.

b) Trazá la gráfica de la función que encontraste en a).

c) ¿Cuál es la temperatura a una altitud de 2,5 km?

d) ¿A qué altitud la temperatura será de -12º C?

e) ¿Cuál es la intersección con el eje x?¿que representa en términos del problema?

15) Para fabricar una pieza de automóvil se tiene, debido a sueldos y a gastos de mantenimiento de maquinarias, un costo fijo mensual de $350000. Además, el material para cada pieza cuesta $100. La pieza se vende a los mayoristas a un precio de $200 cada una. En los meses anteriores, no se pudieron ubicar en el mercado más de 12000 piezas cada mes y se decidió no fabricar más de esa cantidad esta vez.

a) Buscá una expresión para las funciones costo c(x) e ingreso i(x) durante el mes, en función de la cantidad x de piezas fabricadas o vendidas.

b) ¿Cuál es el dominio de las funciones que obtuviste?

c) Si la cantidad de piezas vendidas es igual a la cantidad de piezas fabricadas, la función b(x) se obtiene calculando la diferencia entre ingresos y costos. Encontrá la fórmula para expresar el beneficio en función de las unidades vendidas.

d) Hallá los ceros, los conjuntos de positividad y negatividad de la función beneficio y analizá qué significado tienen para el fabricante.

16) Una empresa de correo de primera clase para entrega inmediata acepta, como máximo, bultos de 20 kg y su tarifa es la siguiente:

Peso	***Tarifa***
2 kg o menos	\$300 con seguro incluido
De 2 kg a 10 kg	\$500 y un adicional por seguro de \$50 por kilo
Más de 10 kg	\$900 y un adicional por seguro de \$25 por kilo

- **a)** Encontrá una expresión C que permita calcular el costo de un envío en función del peso del bulto.
- **b)** ¿Cuál es el dominio de C? ¿y la imagen de C?
- **c)** Representá gráficamente.
- **d)** ¿Cuál es el costo de enviar un bulto de 6 kg? ¿Y uno de 1,750 kg?
- **e)** ¿Cuánto pesa un bulto cuyo costo de envío es \$1335?

17) Algunos científicos opinan que la temperatura superficial promedio del mundo está aumentando en forma constante. En el año 1900 el promedio era de 8,5° C y a partir de allí calcularon un aumento lineal de 0,02° C por año.

- **a)** Encontrá la expresión de la función que representa la situación, definiendo previamente las variables independiente y dependiente.
- **b)** ¿Qué significa la ordenada al origen en términos de la situación?
- **c)** ¿Cuál será la temperatura superficial promedio del mundo en el año 2100?

18) La cantidad de calor en joules requerida para convertir un gramo de agua en vapor está linealmente relacionada con la temperatura en ° C del ambiente. A 10°C esta conversión requiere 2480 joules, y cada aumento de 15°C baja 40 joules la cantidad de calor necesaria.

- **a)** Encontrá la expresión de la función que representa la situación, definiendo previamente las variables independiente y dependiente.
- **b)** ¿Qué representan la pendiente y la ordenada al origen en términos del problema?
- **c)** Si la cantidad de calor necesaria es de 0 joules, ¿qué sucede con la temperatura?

19) Un grupo empresario es propietario de varios departamentos iguales. Si logra alquilar 16 tiene un ingreso neto de \$92160, mientras que si alquila 20 el ingreso neto es de \$115220.

- **a)** Encontrá la expresión de la función que representa la situación, definiendo previamente las variables independiente y dependiente.
- **b)** Representá gráficamente.
- **c)** Determiná la cantidad de departamentos alquilados si el ingreso neto fue de \$144000.
- **d)** Determiná cuántos departamentos debe alquilar para que no exista ni perdida ni ganancia.
- **e)** ¿Cuál será el ingreso si logra alquilar los 40 departamentos de su propiedad?
- **f)** Determiná el Dominio de la función.

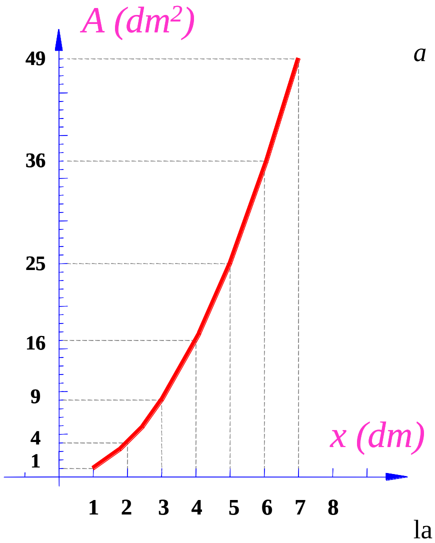
2.5.0 FUNCIONES CUADRÁTICAS

La curva que describe una pelota de básquetbol, los chorros de agua de una fuente, son parábolas. Las secciones de los faros de los coches, de las antenas que captan las emisiones de TV procedentes de satélites artificiales y muchos otros objetos presentes en la vida cotidiana, son parabólicos.

También muchas funciones se representan mediante parábolas: el área de un cuadrado en función del lado, la altura a la que se encuentra una piedra que lanzamos hacia arriba en función del tiempo transcurrido o la que cae libremente desde una cierta altura.

A continuación vamos a analizar las relaciones entre las funciones cuadráticas y las parábolas.

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA 1



Se desea fabricar cajas, con láminas cuadradas de hojalata; que miden de 1dm a 7 dm de lado. El área de cada lámina en función del lado es:

$$A(l) = l^2$$

A partir de la tabla de valores, se grafica

L (dm)	A (dm^2)
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49

$$Df = [1,7]$$
$$If = [1,49]$$

La fórmula de la función cuadrática que se utilizó para construir el modelo de la situación es:

$f(x) = ax^2$ con $a \in \Re \,,\ a \neq 0$

donde $Df = \Re$

La representación gráfica es una parábola.

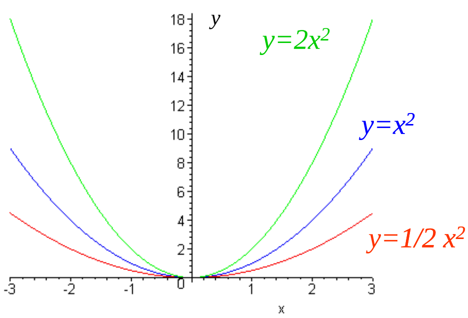
2.5.1 GRAFICO DE LAS FUNCIONES $y = ax^2$

Si a › 0, la función tiene un mínimo en el origen.

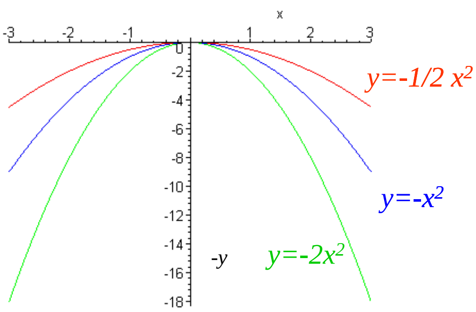
Si a ‹ 0, la función tiene un máximo en el origen.

Si $|a|$ › 1 el gráfico se obtiene contrayendo verticalmente el de $y = x^2$.

Si $|a|$ ‹ 1 el gráfico se obtiene dilatando verticalmente el de $y = x^2$.



$a > 0$



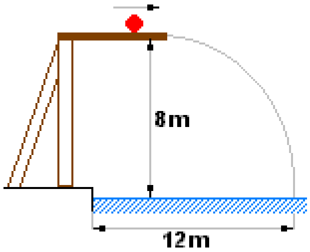
$a < 0$

Como se observa en las gráficas, la función toma el mismo valor para valores opuestos de *x*, su gráfico es simétrico respecto del eje *y*.

El eje *y* es el ***eje de simetría*** de la parábola; su ecuación es $x = 0$.

El único punto que pertenece al eje de simetría y la parábola es el ***vértice***. En estos casos es el punto $V(0,0)$.

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA 2



En una piscina hay un trampolín a 8 metros del agua. Lanzamos una pelota rodando y cae al agua a 12 metros del trampolín. Calculá la ecuación de la trayectoria que describe la pelota desde que sale del trampolín hasta que toca el agua.

SOLUCIÓN:

La trayectoria la podemos identificar inicialmente con la ecuación: $y = ax^2$, con $a < 0$ que se traslada verticalmente sobre el eje *y* en sentido positivo, luego podemos expresarla:

$y = ax^2 + c$ donde *c* indica la traslación en el eje *y*.

Con los datos del problema calculamos "a" y "c". La pelota sale del punto (0,8) y llega al (12,0), sustituyendo obtenemos:

$$(0,8) \quad \Rightarrow \quad 8 = a.0^2 + c \Rightarrow \quad c = 8$$

$$(12,0) \quad \Rightarrow \quad 0 = a.12^2 + 8$$

$$-8 = a.144 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{-8}{144} = -0{,}05$$

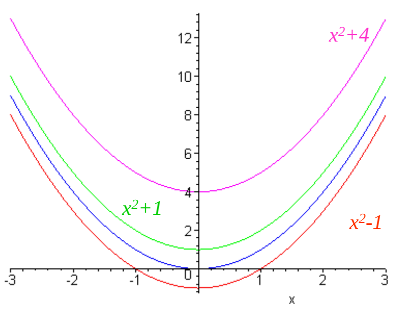
Luego, la ecuación de la trayectoria es:

$$y = -0{,}05.x^2 + 8$$

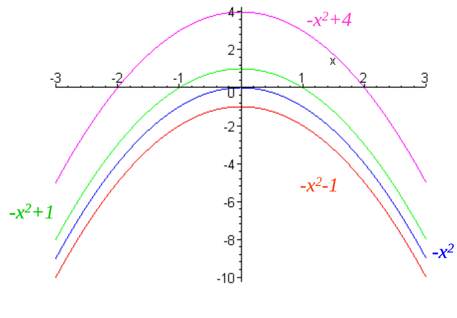
2.5.2 GRAFICO DE LAS FUNCIONES $y = ax^2 + c$

Todas las parábolas tienen como eje de simetría al eje *y*, de ecuación $x=0$.

El vértice se desplaza sobre el eje *y* según los diferentes valores de *c*: $V(0,c)$.



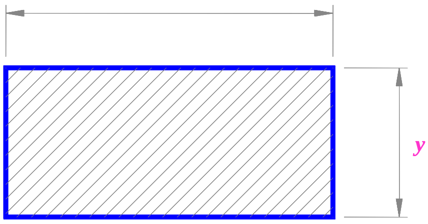
$a > 0$



$a < 0$

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA 3

Se desea calcular las dimensiones del cantero rectangular de mayor área que puede cercarse con 200 metros de alambre.



SOLUCIÓN:

- Dibujamos un diagrama.
- Asignamos nombres a los lados del rectángulo.
- Relacionamos los valores teniendo en cuenta el dato: 200 m de alambre para cercarlo, entonces:

$$200 = 2x + 2y \qquad (1)$$

- Planteamos la incógnita: área mayor:

$$A = x.y \qquad (2)$$

- De la ecuación (1), despejamos el valor de *"y"*:

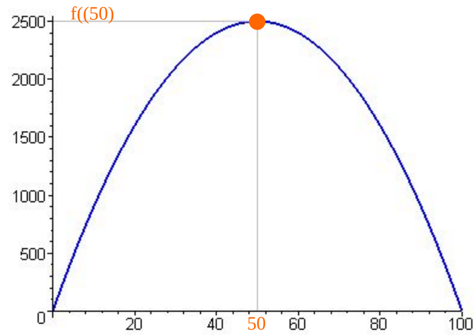
$$y = \frac{200 - 2x}{2}$$

- Sustituimos el valor en (2) y obtenemos:

$$A = x.\left(\frac{200 - 2x}{2}\right) \Rightarrow A = 100x - x^2 \qquad (3)$$

Realizamos una tabla de valores y graficamos:

x	A
0	0
20	1600
40	2400
50	2500
60	2400
80	1600
100	0



Con la información de la tabla y la gráfica observamos que:

- El máximo de la función se obtiene si $x=50$.

Luego las dimensiones del terreno se calculan reemplazando $x = 50$ en (1), de donde $y = 50$. Por lo tanto los lados del terreno miden:

$$x=50 \ ; \ y=50.$$

¿?

¿ Qué particularidad tiene este rectángulo?
¿ Qué podés inferir de esta situación?

La expresión que permite construir un modelo con esta situación es de la forma:

$$y = a(x - x_0)^2 + f(x_0)$$

En nuestro caso: $a = -1$; $x_0 = 50$; $f(x_0) = 2500$

$$y = -(x - 50)^2 + 2500$$

Efectuando las operaciones obtenemos:

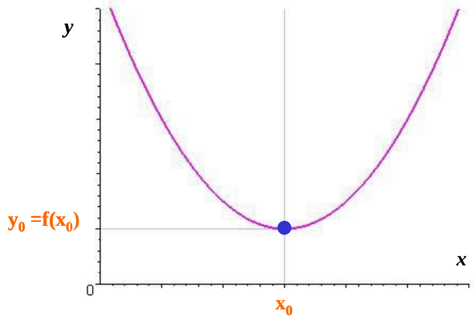
$$y = -(x^2 - 100x + 2500) + 2500$$

$$y = -x^2 + 100x - 2500 + 2500$$

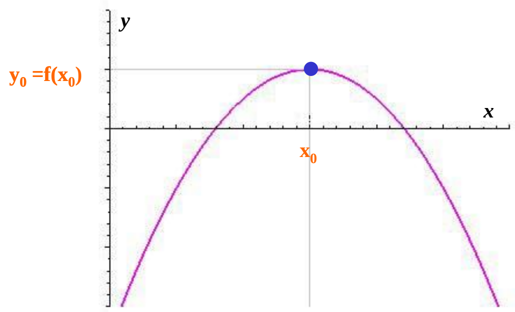
$$\boxed{y = -x^2 + 100x}$$

que coincide con la fórmula (3) que encontramos para expresar el área.

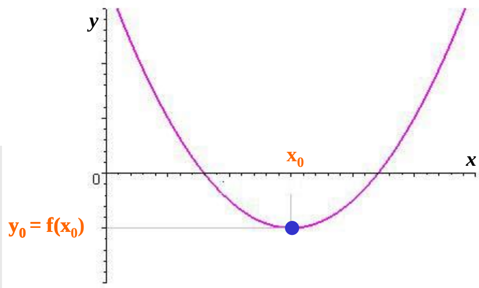
2.5.3 GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES: $y = a(x - x_0)^2 + f(x_0)$



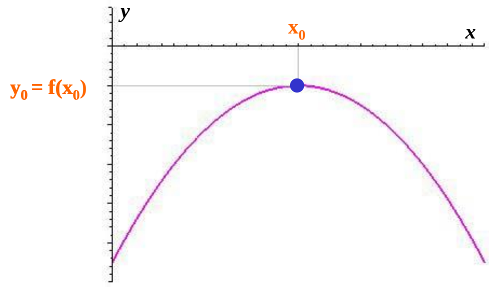
$a > 0$



$a < 0$



$a > 0$



$a < 0$

¿?

¿Existen otras posibles gráficas?. ¿Cuáles?.

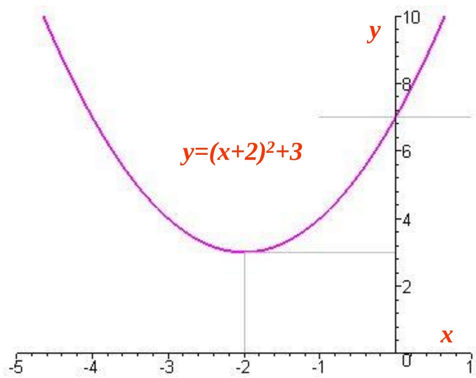
- Todas las parábolas tienen como ***eje de simetría*** a la recta: $x = x_0$
- El ***vértice*** es le punto $V\,(x_0, f(x_0))$ o $V(x_0, y_0)$
- La ***intersección con el eje y*** se obtiene calculando $f(0)$
- La ***intersección con el eje x***, que corresponde a los ceros de la función, se obtiene calculando la solución de la ecuación: $0 = a(x - x_0)^2 + f(x_0)$

ALGUNOS EJEMPLOS

1.- $y = (x+2)^2 + 3$

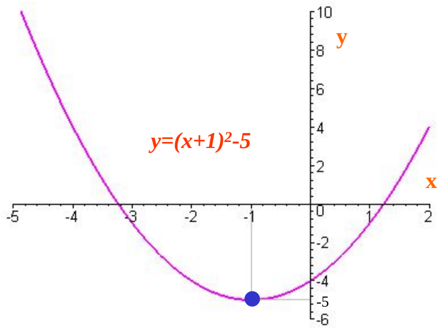
- Vértice → $V(-2, 3)$
- Eje de simetría → $x = -2$
- Intersección eje y: $f(0) = 7$
- Intersección eje x:

$$0 = (x+2)^2 + 3$$
$$-3 = (x+2)^2$$



No tiene solución en R; luego no existe intersección con el eje x.

2.- $y=(x+1)^2-5$



- Vértice $\rightarrow V(-1,-5)$
- Eje de simetría $\rightarrow$ $x=-1$
- Intersección eje *y*: $f(0)=-4$
- Intersección eje *x*:

$$0=(x+1)^2-5$$
$$5=(x+1)^2 \Rightarrow \sqrt{5}=|x+1|$$
$$entonces: \sqrt{5}=x+1 \quad o \quad -\sqrt{5}=x+1$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=-1+\sqrt{5} \\ x_2=-1-\sqrt{5} \end{cases}$$

3.- $y=-2(x-1)^2-4$

- Vértice $\rightarrow V(1,-4)$
- Eje de simetría $\rightarrow$ $x=1$
- Intersección eje *y*: $f(0)=-6$
- Intersección eje x:

$$0=-2(x-1)^2-4$$
$$4=-2(x-1)^2$$
$$-\frac{4}{2}=(x-1)^2 \quad \Rightarrow \quad -2=(x-1)^2 \text{ no tiene solución en } R$$

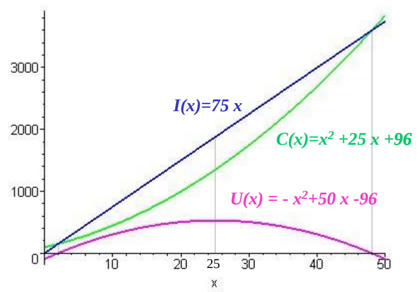
Luego no existe intersección con el eje *x*.

2.5.4 FUNCIÓN CUADRÁTICA DE LA FORMA: $f(x)=ax^2+bx+c$

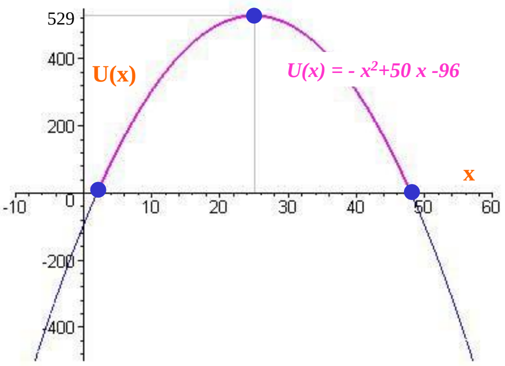
SITUACIÓN PROBLEMÁTICA

Un decorador diseña y vende accesorios de pared y puede vender a un precio de $75 c/u de los accesorios que produce. Si se fabrican x accesorios diarios, el costo total diario de producción es $C(x)=x^2+25x+96$. ¿Cuántos accesorios debe producir por día a fin de obtener las máximas utilidades?

SOLUCIÓN:



- Las utilidades están dadas por las diferencias entre ingresos y costos.
- Como vende a $75 cada accesorio, si "x " es la cantidad de accesorios, el ingreso está dado por: $I(x)=75.x$
- El costo diario según los datos se calculan por: $C(x)=x^2+25x+96$
- Luego las utilidades se determinan por: $U(x)=I(x)-C(x)$, y reemplazando: $U(x)=75x-x^2-25x-96$
  y operando se obtiene:



$$U(x) = -x^2 + 50x - 96$$

- Para calcular el número de accesorios que determinan las máximas utilidades tenemos que hallar el ***vértice*** de la parábola, la abscisa correspondiente dará el número pedido.
- Un camino para hallar el vértice es completar cuadrados, para llevar la función a la forma: $y = a(x - x_0)^2 + f(x_0)$.
- Procedemos del siguiente modo:

$U(x) = -(x^2 - 50x) - 96$	$\rightarrow$	Factor común *(-1)* entre los términos en *x*.
$U(x) = -\left[(x-25)^2 - 625\right] - 96$	$\rightarrow$	Completamos el cuadrado dentro del paréntesis.
$U(x) = -(x-25)^2 + 625 - 96$	$\rightarrow$	Multiplicamos por *(-1).*
$U(x) = -(x-25)^2 + 529$	$\rightarrow$	Entonces el vértice está en *V(25,529*), luego el número de accesorios que debe vender para lograr el máximo beneficio es: *25*.

¿?

¿Qué información dan los puntos de corte en el eje x?.

¿Por que crees que la gráfica debajo del eje x está dibujada con otro color?

La función cuadrática que modeliza la situación anterior está dada por la fórmula:

$$f(x) = ax^2 + bx + c\,, \qquad \text{con } a, b, c\ \varepsilon\ R\ ; \quad a \neq 0$$

y se la denomina ***función cuadrática completa***.

Para graficar es conveniente conocer previamente el *vértice*, el eje de simetría y las intersecciones con los ejes coordenados.

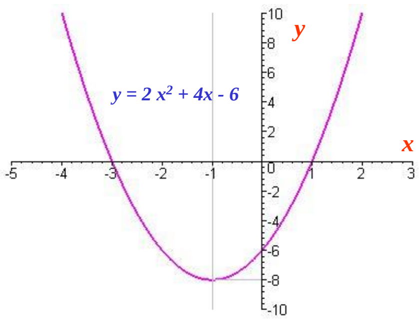
ALGUNOS EJEMPLOS

1. $y = 2x^2 + 4x - 6$

SOLUCIÓN:

- Calculamos el vértice

$y = 2(x^2 + 2x) - 6$	$\rightarrow$	Factor común entre los términos en *x*.
$y = 2\left[(x+1)^2 - 1\right] - 6$	$\rightarrow$	Completamos el cuadrado dentro del paréntesis.
$y = 2(x+1)^2 - 2 - 6$	$\rightarrow$	Multiplicamos por dos los términos dentro del corchete.
$y = 2(x+1)^2 - 8$	$\therefore$	Entonces el vértice está $V(-1,-8)$.



- Eje de simetría*: x = -1*
- Intersecciones en los ejes:

  Eje *y* $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = -6 \Rightarrow f(0) = -6$

  Eje *x* $\Rightarrow y = 0 \Rightarrow 0 = 2(x+1)^2 - 8$

- La abscisa del vértice equidista de los puntos de intersección con el eje x.
- Se puede calcular:

$$x_V = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

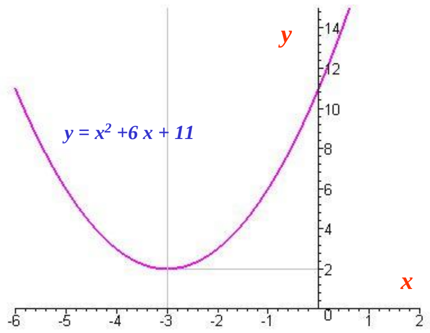
$$8 = 2(x+1)^2$$
$$4 = (x+1)^2$$
$$\sqrt{4} = |x+1| \Rightarrow \pm 2 = x+1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

2. $y = x^2 + 6x + 11$

SOLUCIÓN:

- Calculamos el vértice

$y = (x+3)^2 - 9 + 11$	$\rightarrow$	Completamos el cuadrado .
$y = (x+3)^2 + 2$	$\therefore$	$V(-3,2)$



- Eje de simetría: $x = -3$
- Intersecciones con los ejes

Eje y $\Rightarrow x = 0 \Longrightarrow y = 11 \Longrightarrow f(0) = 11$

Eje x $\Longrightarrow y = 0 \Longrightarrow 0 = (x+3)^2 + 2$

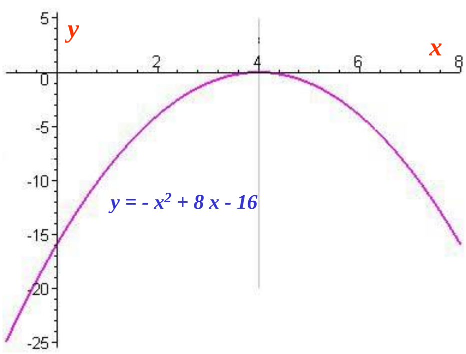
$-2 = (x+3)^2 \Rightarrow$ no hay solución en $\Re$, ¿Por qué?. Por lo tanto no hay intersección con el eje x.

3. $y = -x^2 + 8x - 16$

SOLUCIÓN:

- Calculamos el vértice

$y = -(x^2 - 8x + 16)$	$\rightarrow$	Sacamos factor común .
$y = -\left[(x-4)^2\right]$	$\rightarrow$	Completamos el cuadrado.
$y = -(x-4)^2$	$\therefore$	$V(4,0)$



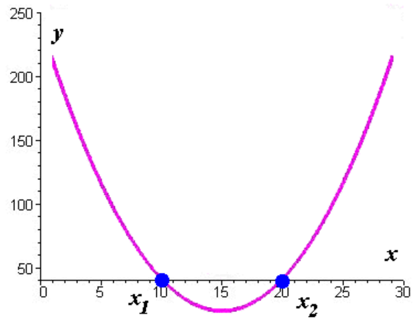
- Eje de simetría: $x = 4$
- Intersecciones en los ejes:

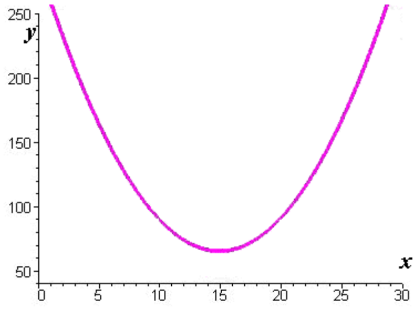
  Eje y $\Rightarrow x = 0 \Longrightarrow y = -16 \Longrightarrow f(0) = -16$

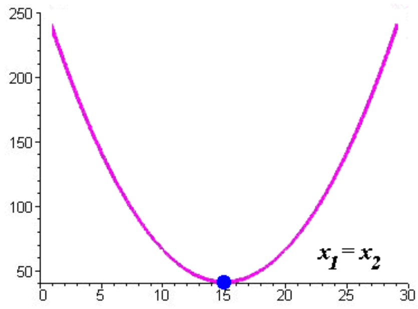
  Eje x $\Longrightarrow y = 0 \Longrightarrow 0 = -(x-4)^2 \Longrightarrow x = 4 \Longrightarrow (4,0)$

Entonces el punto de corte con el eje x coincide con el vértice.

La gráfica de la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ puede tener distintas posiciones respecto del eje x, las cuales se muestran en las figuras siguientes. Sea para el caso $a > 0$.







2.5.5 CEROS DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Calcular, si existen, los valores x_1 y x_2 significa resolver la ecuación algebraica

$$0 = ax^2 + bx + c$$

cuya solución se puede obtener como se procedió en los ejemplos anteriores completando el cuadrado y calculando: x_1 y x_2 o utilizando la fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Así, en el ejemplo **1.** si: $y = 2x^2 + 4x - 6$, entonces $a = 2$; $b = 4$; $c = -6$; reemplazando los valores en la fórmula se obtiene:

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4.2.(-6)}}{2.2} = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{4} = \frac{-4 \pm 8}{4} = \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

En el ejemplo 2. $y = x^2 + 6x + 11$, entonces $a = 1$; $b = 6$; $c = 11$, reemplazando los valores en la fórmula se obtiene:

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4.1.11}}{2.1} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 44}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{-8}}{2} =$$

No tiene solución en los R, luego como ya se observó no hay intersección con el eje x.

En el ejemplo **3.** $y = -x^2 + 8x - 16$,entonces $a = -1$; $b = 8$; $c = -16$, reemplazando los valores en la fórmula se obtiene:

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4.(-1).(-16)}}{2.(-1)} = \frac{-8 \pm \sqrt{0}}{-2} = 4$$

luego $x_1 = x_2 = 4$ $\therefore$ existe un único punto de intersección.

2.5.6 FACTORIZACIÓN DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

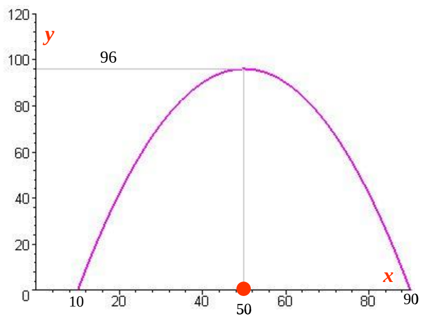
Si conocemos el valor del coeficiente del término de segundo orden *"a"* y los valores correspondientes a los puntos de intersección con el *eje x:* x_1 y x_2, la función se puede expresar:

$$y = a(x - x_1).(x - x_2)$$

A partir de esta fórmula se calcula fácilmente el vértice de la parábola, $V(x_V, y_V)$, donde:

$$x_V = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad ; \qquad y_V = f(x_1)$$

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA



El rendimiento en *(%)* de un generador de placas solares en función de la temperatura está dado por una función cuadrática. Se sabe que el máximo *(96 %)* se tiene para una temperatura de *50 °C* y que es nulo para *10°C* y *90 °C*.

(a) Dibuja una gráfica que represente esta situación

(b) Escribe la ecuación que la representa.

SOLUCIÓN:

(b) Podemos expresar esta situación con la siguiente fórmula

$$y = a.(x - 10)(x - 90) \qquad (*)$$

El máximo corresponde al punto *(50* , 96). Sustituyendo en (*) calculamos el valor de *"a"*.

$$96 = a.(50 - 10)(50 - 90)$$

$$96 = a.(40)(-40) \quad \Rightarrow a = \frac{-96}{1600} = -0{,}06$$

$\therefore$ la ecuación que representa la situación es:

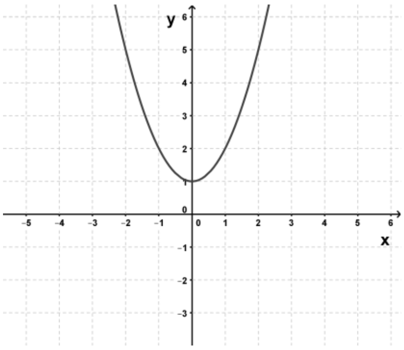
$$y = (-0{,}06).(x - 10)(x - 90)$$

A modo de síntesis:

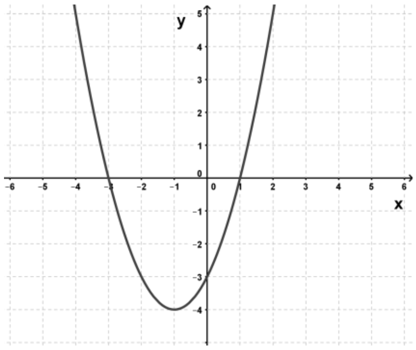
Toda función cuadrática se representa gráficamente por una parábola y toda parábola, con eje paralelo al eje y, es la gráfica de una función cuadrática.

ACTIVIDADES

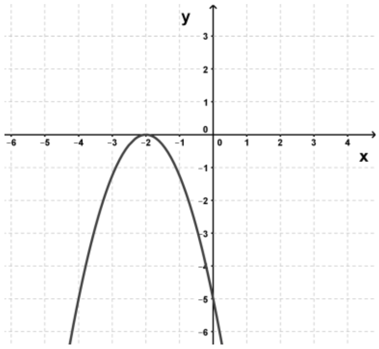
1) Identificá los elementos característicos de cada una de estas parábolas (vértice, eje de simetría, intersecciones con los ejes de coordenadas):



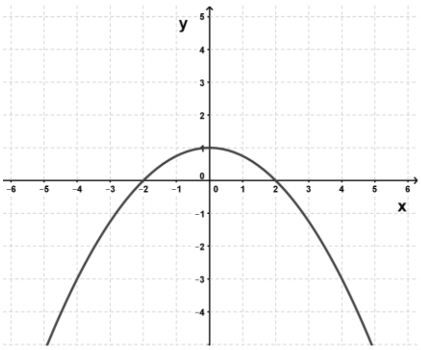
Función 1



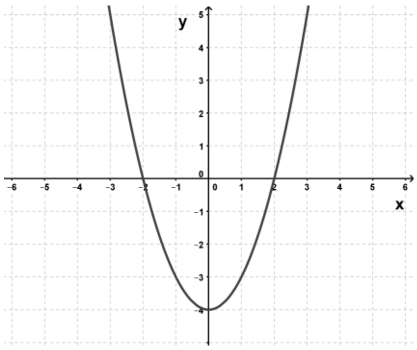
Función 2



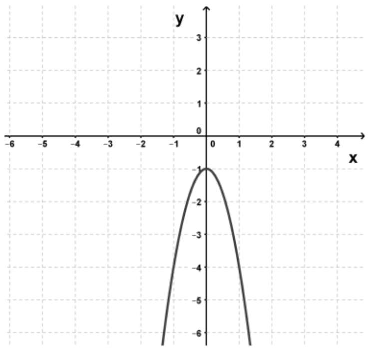
Función 3



Función 4



Función 5



Función 6

2) En cada caso, identificá en que forma está escrita la función (polinómica, factorizada o canónica) y determiná: vértice, eje de simetría, intersecciones con los ejes de coordenadas. Representá gráficamente.

a) $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ **b)** $f(x) = 3x^2 + 6x$

c) $f(x) = 3(x-1)(x+3)$ **d)** $f(x) = 2(x-2)^2 + 1$

e) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3$ **f)** $f(x) = (x+4)^2$

3) Relacioná las siguientes expresiones de funciones cuadráticas con sus gráficos del ejercicio 1.

a) $f(x) = x^2 + 1$ **b)** $f(x) = (x+2)(x-2)$

c) $f(x) = -(x+2)^2$ **d)**

e) $f(x) = (x-1)^2 - 4$ **f)** $f(x) = -x^2 + 1$

g) $f(x) = (x+1)^2 - 4$ **h)** $f(x) = -\frac{5}{4}(x+2)^2$

i) $f(x) = (x+2)^2$ **j)** $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 1$

4) Escribí las funciones que correspondan a las siguientes gráficas:

a) De $f(x)=x^2$ trasladada 3 unidades a la izquierda y $\frac{1}{3}$ unidad hacia abajo.

b) De $f(x)=\frac{1}{4}x^2$ desplazada 2 unidades a la derecha y 1 unidad hacia arriba.

c) De $f(x)=(x-3)^2$ desplazada 1 unidad a la izquierda y expansión vertical al doble.

d) De $f(x)=\frac{1}{2}x^2-1$ trasladada 1,2 unidades hacia abajo.

e) De $f(x)=2(x-1)^2+\frac{5}{2}$ desplazada 5 unidades a la izquierda y con una reflexión con respecto al eje X.

5) Encontrá la expresión de la función cuadrática que cumpla con las siguientes condiciones:

a) Vértice en el origen, eje de simetría coincidente con el eje y , y que pase por *(3,-1)*.

b) Crece en el intervalo $(-\infty,1)$, su imagen es $(-\infty,3]$ y pasar por el punto *(- 1, 2)*.

c) Corta al eje X en *x = - 1* y *x = 3* y su mínimo absoluto es *(1, - 3)*.

6) Analizá similitudes y diferencias de las gráficas de la funciones: $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x+6$ y $g(x)=\frac{1}{2}x^2-2x-6$.

7) Encontrá los valores reales de k para que las funciones cumplan las condiciones pedidas:

a) $y=x^2+k\cdot x+3$ tiene vértice en el punto *(2,-1)*.

b) $y=k\cdot x^2$ pasa por el punto *(-3, 6)*.

c) $y=\frac{1}{2}x^2+2x+k$ tiene una raíz doble.

d) $y=k\cdot x^2+x-2$ tiene dos raíces reales distintas.

e) $y=-2x^2-4x+(-3+k)$ tiene imagen $(-\infty,2]$

8) Calculá un número entero tal que sumándole dos unidades al triplo de su cuadrado se obtiene siete veces dicho número.

9) El cuadrado de un número positivo menos el doble del número es igual a 3. ¿Cuál es el número?

10) ¿En cuánto se debe ampliar un cuadrado de *50 cm* de lado para que el área del nuevo cuadrado sea de *64* dm^2?

11) Se desea construir una plataforma de observación que dominará un valle. Sus dimensiones serán de 6 metros por 12 metros. Un cobertizo rectangular de 40 m^2 estará en el centro de la plataforma y la parte no cubierta será un pasillo de ancho uniforme. ¿Cuál será el ancho del pasillo?

12) Desde la azotea de un alto edificio se lanza una pelota hacia arriba. La altura a la que está la pelota con respecto al suelo viene dada por la función: $h(t) = 4,5 + 4t - 0,5t^2$ (t en segundos, h en dam).

- **a)** Representá gráficamente la función.
- **b)** ¿Cuál es la altura máxima que alcanza y en qué momento la alcanza?
- **c)** ¿A qué altura está la azotea?
- **d)** ¿Al cabo de cuantos segundos cae al suelo?
- **e)** ¿Cuál es el dominio de esta función?

13) En una isla se introduce una cierta cantidad de conejos en agosto de 1999. La función $f(x) = 1500 + 120x - 3x^2$ permite calcular la cantidad de conejos que hay en la isla x meses después del mes de agosto de 1999.

- **a)** ¿En qué mes la población de conejos fue máxima?
- **b)** ¿Qué cantidad de conejos se introduce inicialmente en la isla?
- **c)** ¿Cuál es la mayor cantidad de conejos que llega a haber en la isla?
- **d)** ¿Cuántos conejos hay en agosto del 2000?
- **e)** ¿Se extingue en algún momento la población de conejos?

14) En una pequeña empresa, con base a la experiencia de una fábrica se ha determinado que las unidades producidas transcurridas t horas de una jornada laboral se encuentran representadas por la expresión $P(t) = -t^2 + 100t$.

- **a)** Representá gráficamente la situación y determiná el Dominio y la Imagen.
- **b)** ¿A qué hora es máxima la producción? ¿Cuál es la máxima producción posible?
- **c)** Interpretá la ordenada al origen en términos del problema.

15) Los cables que sostienen un puente colgante tienen la forma de una parábola cuya ecuación es: $y = 0,01x^2 - x + 35$, donde x e y se miden en metros.

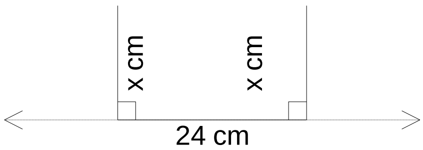
- **a)** Representá gráficamente, teniendo en cuenta que la longitud del puente es 100 metros.
- **b)** Encontrá la distancia entre el punto más bajo del cable y el piso del puente.
- **c)** Determiná la altura de las torres que sostienen a los cables.

16) Con una cuerda de 24 cm de longitud, construimos rectángulos de perímetro fijo.

- **a)** Escribí la función que da el área del rectángulo según la longitud de la base.
- **b)** Represéntala gráficamente.
- **c)** ¿Cuál es el máximo de esta función?
- **d)** ¿Cuál es el dominio de esta función?

17) Se quiere construir una parcela rectangular y dividirla, con dos cercas paralelas a uno de sus lados, en tres sectores para realizar distintos cultivos. Se desea cercar con dos vueltas de alambre todo su perímetro y las divisiones. Para ello se cuenta con 800 metros de alambre.

a) Expresá el área de la parcela como una función de la base.
b) Represéntala gráficamente.
c) ¿Cuál es el máximo de esta función?
d) ¿Cuál es el dominio de esta función?



18) Una canaleta rectangular se construye doblando una lámina metálica de 24 cm de ancho como se muestra en la figura.

a) Encontrá el área, en función de x, del corte transversal de la canaleta.
b) ¿Cuánto debe medir x para que el volumen de agua que pasa por la canaleta sea la mayor posible?

19) La administración de un mercado de pulgas tiene 200 lugares rentados a 40 dólares cada uno. Si aumenta x cantidad de dólares por un espacio, disminuyen la cantidad de lugares rentados en el cuádruple del aumento.

a) Expresá el ingreso que recibe la administración como una función de la cantidad de espacios rentados.
b) Graficá la función hallada en **a)**.
c) Interpretá las raíces en términos del problema.

2.6.0 FUNCIONES POLINÓMICAS

En los temas anteriores analizamos funciones constantes, lineales y cuadráticas que se representan, respectivamente, mediante las ecuaciones:

$$f(x)= c \;;\; f(x)= ax + b;\; f(x)= ax^2+bx+c.$$

Llamamos polinomio, de una indeterminada, a toda expresión de la forma:

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

donde $n \in N$, $a_0, a_1, \ldots a_n$ son números reales, x se llama indeterminada.

Es posible asociar a cada polinomio una función polinómica de la forma (1) y recíprocamente.

Las operaciones cálcu-lo de raíces y factorización de polinomios se pueden consultar en el Anexo correspondiente.

Estos son casos particulares de una clase importante de funciones llamadas ***funciones polinómicas***. Estas funciones, por sus propiedades y por la simplicidad con que se opera con ellas, se utilizan tanto para modelar distintas situaciones como para aproximar otras funciones.

Una función polinómica de *grado n* es de la forma:

$$(1) \quad f(x)= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_1\, x + a_0$$

donde $a_n \neq 0 \;;\; a_0, a_1, \ldots.., a_n \in R \;;\; n \in N$

El dominio de la función es el conjunto *R*.

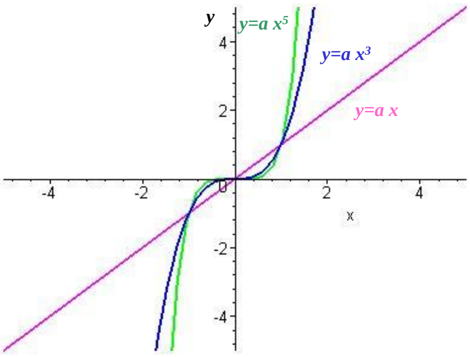
En este curso analizaremos las características de un grupo de estas funciones, aquellas que correspondan a la fórmula:

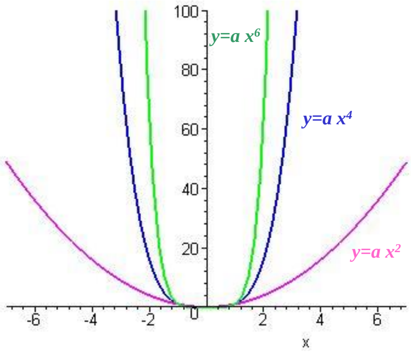
$$f(x) = ax^n \qquad a \in R \;;\; n \in N$$

llamadas también ***funciones potenciales.***

2.6.1 GRÁFICOS DE LAS FUNCIONES POTENCIALES

$$f(x) = a\, x^{\,n}$$





a > 0
n impar

a > 0
n par

ACTIVIDADES

1) Dibujá en un mismo gráfico las siguientes funciones, separando las pares de las impares.

a. $y = 3x^2$ b. $y = ½ x^3$
c. $y = ¼ x^4$ d. $y = ¼ x^5$

2) Compará el comportamiento de las funciones para $0<x<1$ y para $x>1$ ¿ Qué conclusión obtenés?

3) Reiterá los dibujos si $a<0$.

4) Observá las gráficas e indica de que depende el crecimiento y/o decrecimiento de una función potencial.

5) A partir de la gráfica de $y=x^3$ dibujá la de:

a. $y= x^3 + 4$ b. $y= x^3 – 1$
c. $y= -2x^3$ d. $y= (x-1)^3 + 5$

6) A partir de la gráfica de $y= x^4$ dibujá la de:

a. $y= x^4 – 1$ b. $y= x^4 + 2$
c. $y= -(x-2)^4$ d. $y= 2(x+1)^4 + 5$

2.7.0 FUNCIONES ESPECIALES

Ahora analizaremos algunas funciones especiales: *Función valor absoluto, Función parte entera* y *Función signo de x.*

2.7.1. FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO

Se define de la siguiente manera: $f(x)=\begin{cases} x & si\ \ x \geq 0 \\ -x & si\ \ x < 0 \end{cases}$.

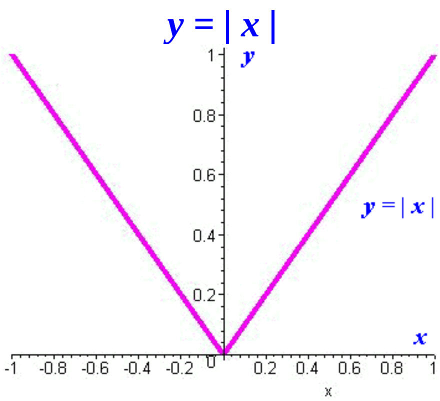
y se indica $y = f(x) = |\,x\,|$ **.**

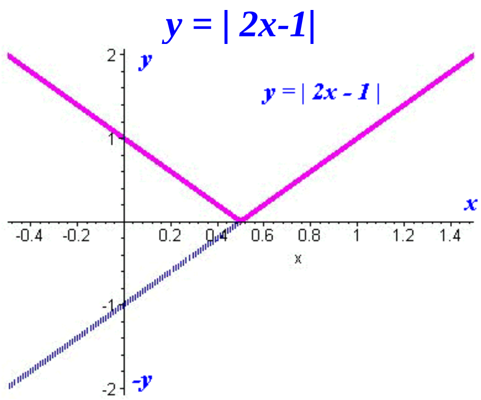
La gráfica coincide con la recta $y = x$, para $x \geq 0$ y con la recta $y = -x$, para $x<0$.

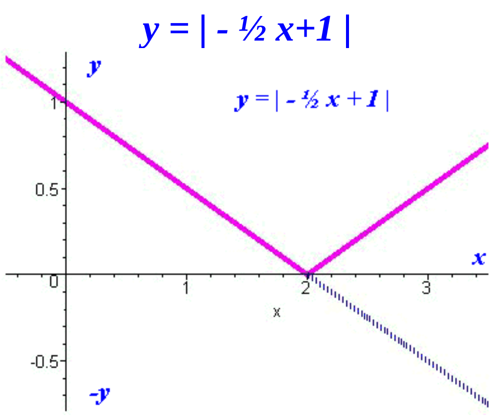
Su dominio es el conjunto de los números reales. Indicamos $D_f = \Re$.

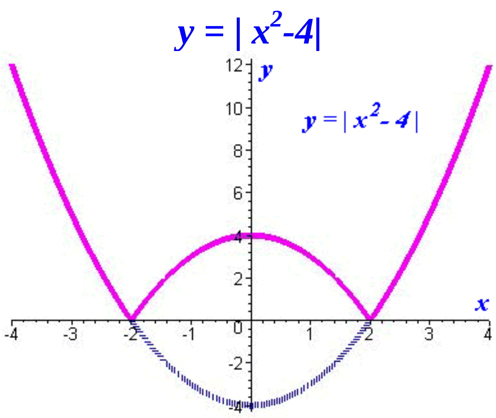
Su imagen es el conjunto de los números reales positivos incluyendo al cero Indicamos: $I_f = [0,+\infty)$.

> La gráfica de la función $y = |f(x)|$ es muy fácil de representar si se conoce la de $y = f(x)$ pues basta pasar hacia arriba, en forma simétrica, todo lo que está bajo el eje x.









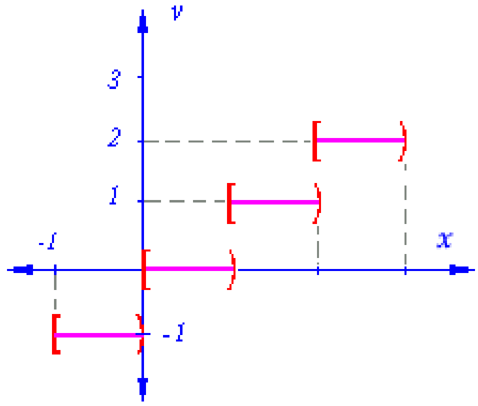
2.7.2. FUNCIÓN PARTE ENTERA

¿?
Cúal es el dominio y la imagen de la función?

Es la función que a cada $x \varepsilon R$ se le hace corresponder el número entero *n*, tal que $n \leq x < n+1$. Se simboliza : $f(x) = [x]$.

Luego $[2] = 2$; $[2.3] = 2$; $[1.95] = 1$; $[0.03] = 0$; $[-0.02] = -1$

La gráfica de la función es:



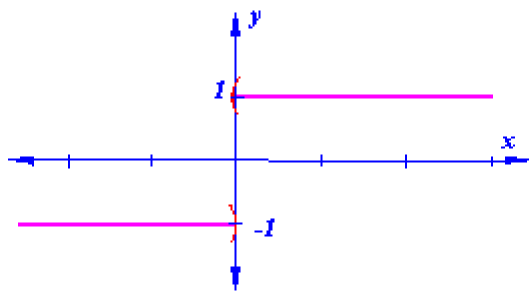
2.7.3. FUNCIÓN SIGNO DE X.

¿?
Cúal es el dominio y la imagen de la función?

Se define de la siguiente manera:

$$y = sgn\,x = \begin{cases} 1 & si \quad x > 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \\ -1 & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Su gráfica es :



ACTIVIDADES

1) A partir del gráfico de la función $f(x)=|x|$, graficá las siguientes funciones. En cada caso, determiná las intersecciones con los ejes de coordenadas:

a. $g(x)=|x|+1$

b. $g(x)=1-|x|$

c. $g(x)=|x-2|$

d. $g(x)=|x+3|-1$

2) Graficá las siguientes funciones, indicando en cada caso: dominio, imagen e intersección con los ejes de coordenadas:

a. $f(x)=\left|\frac{3}{2}x+2\right|$

b. $f(x)=\left|x^2-5x+4\right|$

1) En cada caso, indicá la respuesta correcta justificando tu respuesta:

a) La ecuación de la recta que pasa por los puntos $(2;5)$ y $(-3;4)$ es:

i) $y=\frac{1}{5}x+\frac{23}{5}$ ii) $y=5x-5$

iii) $y=-\frac{1}{5}x+\frac{27}{5}$ iv) $y=-\frac{1}{5}x+\frac{17}{5}$

b) Las rectas $y=\sqrt{5}x+2$ e $y=ax-1$ son perpendiculares si:

$a=-\sqrt{5}$ $a=\frac{1}{\sqrt{5}}$

$a=\sqrt{5}$ $a=-\frac{\sqrt{5}}{5}$

c) El dominio de la función: $f(x)=\sqrt{\frac{x}{x-1}}$ es:

$D_f=(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$ $D_f=[0,1]$

$D_f=[0,1)$ $D_f=(-\infty,0]\cup(1,+\infty)$

d) Si el gráfico de la función $y=2x^2$ se lo traslada una unidad hacia la derecha y dos unidades hacia abajo, la ecuación de la función resultante es:

$y=2(x-1)^2-2$ $y=2(x-2)^2+1$

$y=2(x+1)^2-2$ $y=2(x+2)^2+1$

e) La ecuación de la parábola cuyo vértice es $(-1;2)$ y que pasa por $(0;3)$ es:

$y=(x-1)^2+2$ $y=5(x+1)^2-2$

$y=-\frac{1}{8}(x+1)^2+2$ $y=(x+1)^2+2$

f) La función: $y=\log_3(2x+1)$ corta al eje x en el punto:

$(1,0)$ $(0,0)$

$\left(-\frac{1}{2};0\right)$ $(0,1)$

2) Para cada uno de los siguientes enunciados, escribí una fórmula que represente a la función e indicá cuál es su dominio:

a) Se desea cercar dos parcelas rectangulares adyacentes (consecutivas) e iguales que encierren entre las dos un superficie de 1000 m^2. Si x indica el ancho de las parcelas, encontrá la función L(x) que da la longitud de cerca necesaria para cercar las dos parcelas.
b) Se quiere construir una caja partiendo de un trozo de cartulina rectangular de 24 por 32 cm, recortando un cuadradito en cada esquina y doblando. Determiná la función que da el volumen de la caja dependiendo del lado del cuadrado cortado.
c) La tercera Ley de Kleper sobre le movimiento planetario dice que el cuadrado del período T de un planeta (tiempo que toma el planeta para efectuar una revolución completa alrededor del sol) es directamente proporcional al cubo de la distancia promedio d al sol. Expresá esta Ley como una ecuación.

3) Dados los puntos $P = (-1;1)$ y $Q = (2;7)$

a) Encontrá la ecuación de la recta r que pasa por los puntos P y Q. Graficá
b) El punto $A = (s;2)$ pertenece a r. Determiná el valor de la abscisa de A.
c) Encontrá la ecuación de la recta perpendicular a r que pasa por A.

4) En el año 2000 una empresa compró máquinas nuevas para su fábrica. En ese momento el valor de las mismas era de $50000, pero por el uso continuo y los avances de la tecnología, este valor disminuye $1800 por año.

a) Encontrá la expresión del valor de las máquinas en función de los años de uso, suponiendo que la expresión es lineal.
b) Trazá la gráfica de la función que encontraste en a).
c) Interpretá el valor de la pendiente en términos del problema.
d) ¿Cuál es el valor actual de las máquinas?
e) ¿En qué año las máquinas tendrán un valor de $33800?
f) ¿Cuál es la intersección con el eje y? ¿que representa en términos del problema?

5) Dos tanques, A y B. contienen agua y se están llenando por cañerías diferentes. El tanque A contiene 400 litros inicialmente y recibe un caudal de 20 litros por segundo. El tanque B contiene 190 litros inicialmente y recibe un caudal de 90 litros por segundo

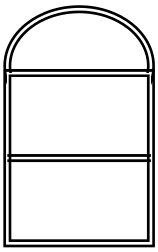
a) Si la capacidad de ambos es de 500 litros, ¿cuál se llenará primero?
b) Si la capacidad de A es de 1000 litros y la de B, 3250 litros, ¿cuál se llenará primero?
c) ¿Cuándo tendrán igual volumen?
d) Representá gráficamente.

6) Al inicio de su gestión, el gerente de ventas de una empresa recibió un balance que arrojaba una ganancia de \$15 millones anuales. A partir de ese momento la ganancia de la empresa creció linealmente hasta que, cuatro años después, se había duplicado. Durante los siguientes dos años, las condiciones de mercado internacional mantuvieron la ganancia constante, pero al finalizar el sexto año, ésta comenzó a decrecer linealmente, hasta desaparecer cuatro años después. El gerente, en reunión extraordinaria de accionistas, planteó la necesidad de poner en marcha un Plan de Emergencia. Éste fue aceptado y en los siguientes años la ganancia aumentó a razón de \$5 millones por año.

a) Graficá la variación de la ganancia G de la empresa (en millones de \$) en función del tiempo transcurrido.
b) Determiná la fórmula de la función G.
c) ¿Con qué velocidad creció la ganancia de la empresa durante los cuatro primeros años de gestión del gerente?
d) ¿Cuándo la ganancia anual superó los \$30 millones?
e) Indicá los intervalos de crecimiento de la función.
f) ¿En algún momento la empresa tuvo pérdidas? Justificá tu respuesta

7) La temperatura T, en grados centígrados, que adquiere una pieza sometida a un proceso viene dada en función del tiempo t, en horas, por la expresión: $T(t) = 40t - 10t^2$.

a) Representá gráficamente la función T.
b) Determiná la temperatura máxima que alcanza la pieza.
c) ¿Qué temperatura tendrá la pieza transcurrida una hora? ¿volverá a tener esa misma temperatura en algún otro instante?



8) Para hacer una ventana como la que muestra el dibujo se dispone de 15m de varilla.

a) ¿Cuáles deben ser las medidas de la ventana para que la superficie sea máxima?
b) ¿Cuál es la superficie máxima?

2.9.0 AUTOEVALUACIÓN

1) En los ejercicios a), b), c) y d) completá los espacios en blanco

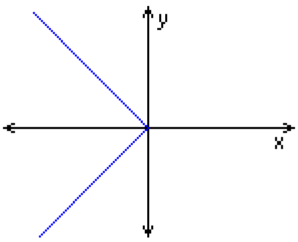
a. Una recta con abscisa en el origen - 2 y ordenada en el origen 16, tiene pendiente -----

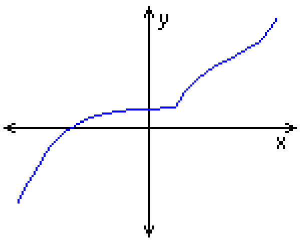
b. Las rectas r : 6 x + 2 y = 1 ; s : k x – 9 y = 5 son paralelas si k = ----------

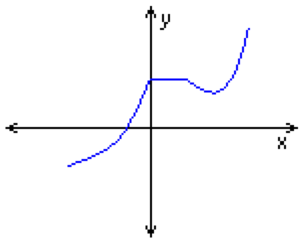
c. El dominio de la función f(x) = $\sqrt{\dfrac{x-2}{x}}$ es D_f =--------

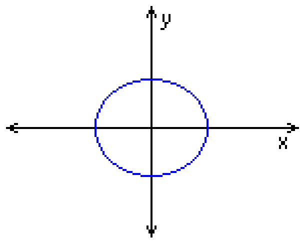
2) Expresá el perímetro P de un cuadrado en función de su área A

3) a. ¿Cuál(es) de las siguientes gráficas corresponden a una función?
b. Para la(s) gráfica(s) que corresponda(n) a una función verificá si es biyectiva
Justificá tu respuesta.



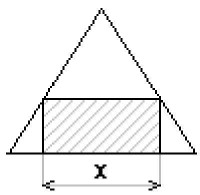






4) Si se conoce la gráfica de y = f(x)
a. ¿Cómo se obtiene la de y = - f(-x) ? b. ¿y la de y = 2 – f(x-1) ?

5) Un rectángulo está inscripto en un triángulo equilátero de 30 cm de perímetro.
a. Expresá el area del rectángulo como una función de su base.
b. Calculá las dimensiones del rectángulo de mayor área.



6) Una porción de terreno rectangular se va a cercar y luego se dividirá la mitad por una valla que cuesta 2 $ / dm, la otra cerca tiene un costo de 5 $ / dm. Se gasta $ 960 en materiales. Si “x” dm es la longitud de la valla central del terreno

a. Expresá el área del terreno en función de “x”

b. ¿Cuál es el dominio de la función resultante?

2.10.0 SÍNTESIS MÓDULO II

FUNCIÓN: relaciona dos variables, a cada valor de la variable independiente ***"x"*** le corresponde un ***único*** valor de la variable dependiente ***" y"***

- El conjunto de valores de ***x*** para los que corresponde un valor de ***y*** se llama ***dominio de definición de f***
- Se representa en ejes cartesianos ortogonales
- Características fundamentales de las gráficas
    - Creciente / decreciente
    - Valores máximos / mínimos
    - Continuidad / discontinuidad
    - Periodicidad
    - Par / impar

FUNCIÓN LINEAL ⟶ $y = f(x) = a\,x + b \qquad a, b \in \boldsymbol{R}$

Toda función lineal se representa por una recta del plano y toda recta del plano, que no es paralela al eje y, es una función lineal.

En la ecuación de la recta y =a x + b:

a representa la pendiente y b la ordenada al origen

Las rectas $\begin{cases} y = a_1\,x + b_1 \\ y = a_2\,x + b_2 \end{cases}$ son a) paralelas si $a_1 = a_2$

b) perpendiculares si $a_1\,a_2 = -1$

Ecuaciones de la recta $\begin{cases} y = a\,x + b \\ y = a\,(x - x_o) + y_o \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1 \end{cases}$

FUNCIÓN CUADRÁTICA $\longrightarrow$ $y = f(x) = a\,x^2 + b\,x + c \qquad a, b, c \in R,\ a \neq 0$

- Toda función cuadrática se representa por una **parábola de eje vertical**
- Completando cuadrados la ecuación se expresa

$$\mathbf{y = a\,(x - x_o)^2 + y_o}$$

$$\begin{cases} V(x_o, y_o) & \text{es el } \textbf{\textit{vértice}} \text{ de la parábola} \\ x = x_o & \text{es el } \textbf{\textit{eje de simetría}} \text{ de la parábola} \end{cases}$$

- Los ceros de la función se pueden calcular aplicando la fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Si se conocen las raíces x_1 y x_2 es posible factorizar la ecuación y escribir

$$\mathbf{y = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)}$$

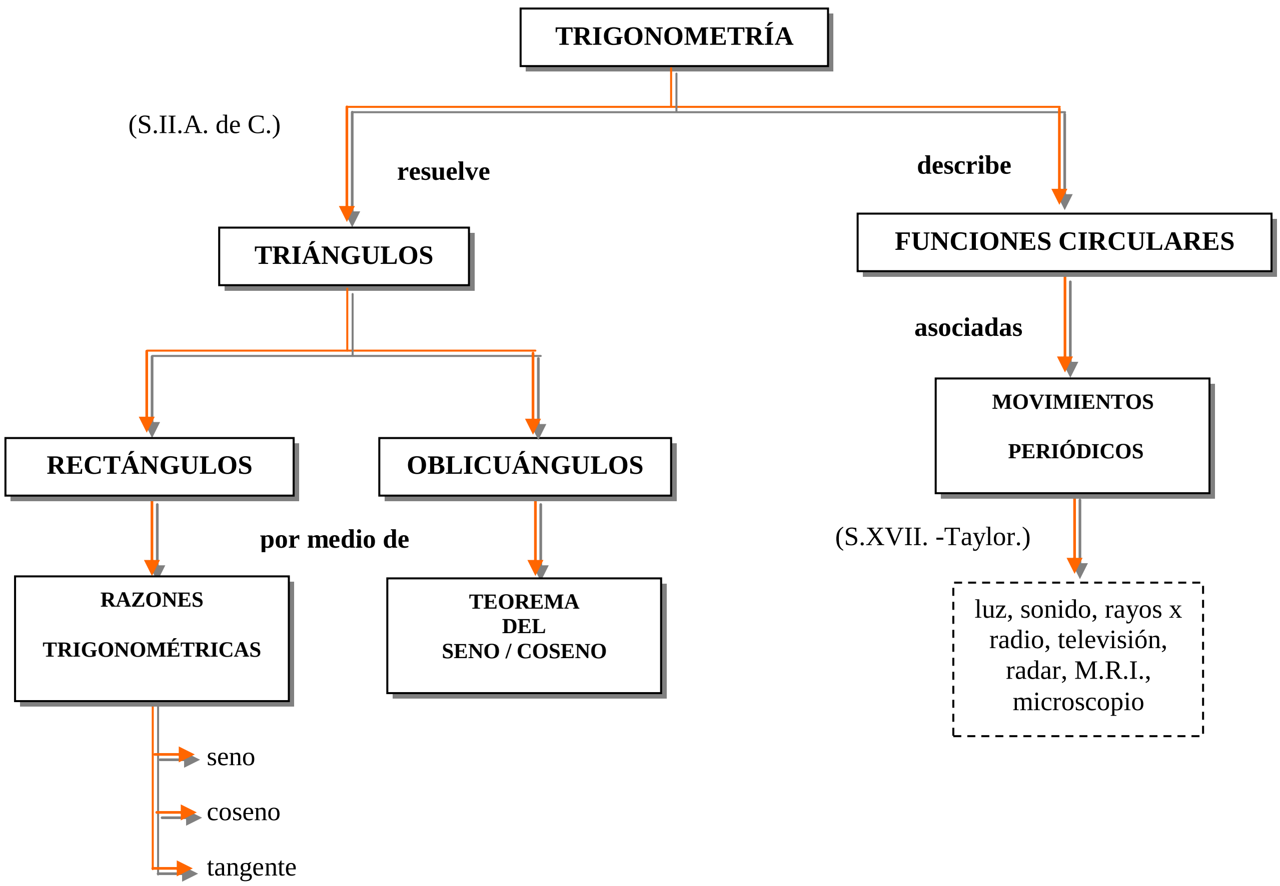
MODULO III TRIGONOMETRÍA

OBJETIVOS

Al concluir el módulo III estarás en condiciones de:

- Calcular perímetros y áreas de polígonos y circunferencias.
- Identificar los gráficos de las funciones seno, coseno, tangente.
- Reconocer los gráficos de las funciones trigonométricas en base a la periodicidad, amplitud, frecuencia, continuidad, paridad, ...
- Resolver ecuaciones trigonométricas e interpretar sus soluciones.
- Analizar, discutir y resolver problemas.

DIAGRAMA CONCEPTUAL



3.1.0 NOCIONES DE GEOMETRÍA

A continuación, repasaremos algunas nociones de geometría que te serán útiles para plantear y resolver problemas a lo largo de este seminario.

En el mundo en el que vivimos podemos observar muchos objetos con formas geométricas. En la Naturaleza abundan más las líneas curvas, pero en los objetos construidos por los seres humanos predominan las rectas. Muchas de las figuras planas que podés contemplar a tu alrededor están limitadas por segmentos, por ejemplo, ventanas, puertas, baldosas, cuadros, etc. Estas figuras se llaman **polígonos**.

Los polígonos reciben diferentes nombres según el número de lados que tengan

Nombre del polígono	Número de lados
Triángulo	**3**
Cuadrilátero	**4**
Pentágono	**5**
Hexágono	**6**
Heptágono	**7**
Octógono	**8**
Eneágono	**9**

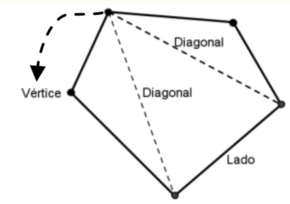
Los **lados** de un polígono son los segmentos que forman el borde del polígono.

La suma de las longitudes de los lados se denomina **perímetro**.

Dos lados consecutivos del polígono se unen en un punto llamado **vértice**.

Los segmentos que unen dos vértices no consecutivos del polígono se llaman **diagonales.**

Los polígonos que tienen todos sus lados iguales se llaman **polígonos regulares.**



3.1.1 CLASIFICACIÓN DE TRIÁNGULOS

Por las longitudes de sus lados un triángulo puede ser:

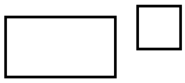
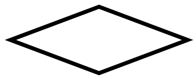
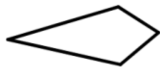
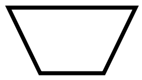
→ **Equilátero**, si tiene los tres lados de la misma longitud.
→ **Isósceles**, cuando tiene dos lados iguales y otro desigual.
→ **Escaleno**, si los tres lados tienen diferente longitud.

Según la amplitud de sus ángulos un triángulo puede ser:

→ **Acutángulo**, si los tres ángulos son agudos.
→ **Rectángulo**, cuando tiene un ángulo recto.
→ **Obtusángulo**, si tiene un ángulo obtuso.

3.12 CLASIFICACIÓN DE CUADRILÁTEROS

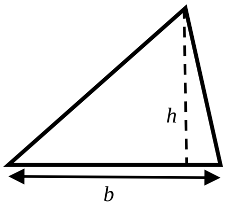
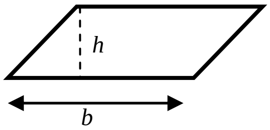
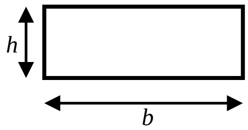
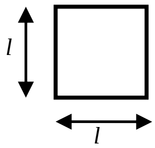
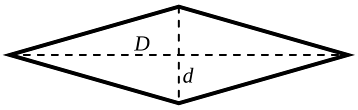
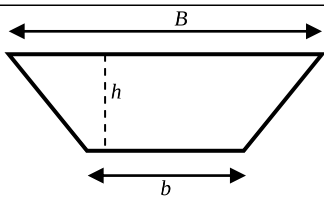
Estos polígonos se pueden clasificar según el número de lados paralelos que tengan, tal como se muestra en la tabla siguiente:

- Cuadriláteros
  - Paralelogramos (lados paralelos dos a dos)
    - Rectángulo 
    - Rombo 
    - Romboide 
  - Trapecios (sólo dos lados paralelos)
    - Trapecio Rectángulo 
    - Trapecio Isósceles 
    - Trapecio Escaleno 
  - Trapezoides (ningún lado paralelo) 

3.13 ÁREA DE FIGURAS PLANAS

A continuación recordaremos las áreas de las superficies poligonales más sencillas.

> En el Sistema Métrico Decimal las unidades de medida son: Km, Hm, Dam, m, dm, cm y mm

Polígono	Área
 **Triángulo**	$\dfrac{b \cdot h}{2}$
 **Paralelogramo**	$b \cdot h$
 **Rectángulo**	$b \cdot h$
 **Cuadrado**	l^2
 **Rombo**	$\dfrac{D \cdot d}{2}$
 **Trapecio**	$\dfrac{(B+b) \cdot h}{2}$

El **perímetro** de una circunferencia de radio r es:

Perímetro = 2. π . r

El **área** de una circunferencia de radio r es:

Area = π . r^2

3.1.4 CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

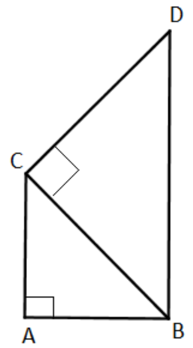
Circunferencia es el conjunto de todos los puntos del plano que están a una distancia fija de un punto, llamado centro.

La circunferencia es el borde y el círculo es el interior de la circunferencia.

En la figura se muestran los principales elementos que existen en una circunferencia.

ACTIVIDADES

1) El perímetro de un triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ es de 59 cm, el lado $\overline{AB}$ es 4 cm mayor que el lado $\overline{BC}$ y el lado $\overline{AC}$ es 5 cm menor que el duplo de $\overline{BC}$. Calculá la longitud de los lados del triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$.



2) Los triángulos rectángulos $\overset{\Delta}{ABC}$ y $\overset{\Delta}{BCD}$ son isósceles, y el lado $\overline{BD}$ tiene una longitud de $\sqrt{5}$ cm . Calculá:

a) La longitud de $\overline{AB}$.

b) El perímetro de los triángulos $\overset{\Delta}{ABC}$ y $\overset{\Delta}{BCD}$.

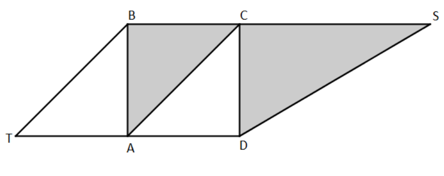
c) El área del triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$.

3) El perímetro de un triángulo equilátero es de $6\sqrt{3}$ cm. Calculá el área.

4) En un terreno cuadrado hay una pileta rectangular de 20 m por 30 m, y se sabe que la superficie que queda alrededor de la pileta es mayor que 1200 m^2. ¿Se puede alambrar el terreno con 150 m de alambre?

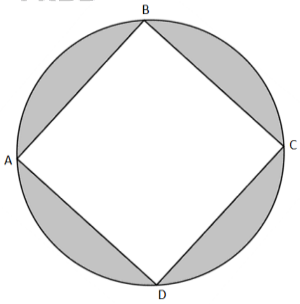
5) Una alfombra rectangular de 2,4 m de largo por 2 m de ancho cubre $\frac{2}{9}$ de un salón de 7,2 m de largo. ¿Cuál es el ancho del salón?

6) En un terreno con forma de trapecio con 200 m de base mayor, 140 de base menor y 80 m de altura, se han plantado 2 pinos por cada 100 m^2. ¿Cuántos árboles se plantaron en total?



7) ABCD es un cuadrado de 5 cm lado, la longitud de $\overline{BS}$ es $10\sqrt{2}$ cm. Calculá el área de la zona sombreada en la figura.

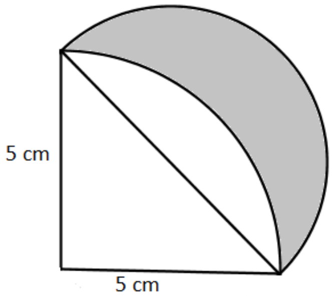
8) Mientras la rueda delantera del triciclo da 3 vueltas, las traseras, de 18 cm de diámetro, dan 5. ¿Qué radio tiene la rueda delantera?



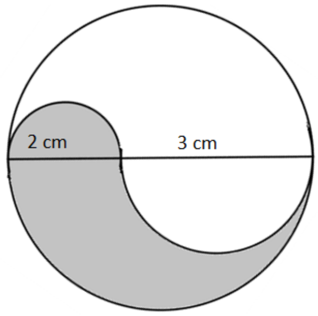
9) En la figura, el cuadrilátero ABCD es un cuadrado. La longitud de la circunferencia es $\pi \cdot \sqrt{2}$ cm. Calculá (en función de π) el área de la figura sombreada.

10) Calcula el área de la parte sombreada de las siguientes figuras:

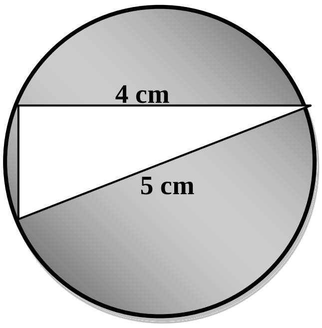
a)



b)



c)



UN POCO DE HISTORIA

La trigonometría nació en el siglo II a.C. con el intento de Hiparco de transformar a las observaciones astronómicas en un arte más exacto; para ello elaboró tablas para una función relacionada con la moderna función *seno* y la evaluó en ángulos a intervalos de medio grado. Las utilizó principalmente para calcular la órbita de los planetas a través del espacio. Por su parte Erastótenes (≈ 276 – 196 a.C.) empleó la trigonometría para calcular la circunferencia de la Tierra y Aristarco de Samos (310 – 230 a.C.) para estimar las distancias al Sol y a la Luna, (observó que cuando la Luna está exactamente en medio creciente es el vértice del ángulo recto que forma con el Sol y la Tierra).

La navegación, la agrimensura, la cartografía... fueron otras tantas fuentes de motivación para el desarrollo de la trigonometría.

La trigonometría moderna se interesa especialmente por la periodicidad de las funciones trigonométricas y podemos considerar que alcanza su máximo desarrollo con la aparición de las series de Fourier, a principios del siglo XIX, con lo que se une estrechamente al análisis, proporcionando un instrumento poderoso para la exploración de las vibraciones y movimientos periódicos. Esto ha permitido su aplicación en campos tan diversos como el procesamiento de señales en la industria telefónica, la codificación de música en reproductores de discos compactos, la determinación de las distancias a las estrellas, la producción de rastreos CAT para uso médico,....Así el electrocardiograma, como representación de una función periódica, es una herramienta fundamental que utiliza el médico para diagnosticar los distintos trastornos cardíacos por comparación de gráficos.

La importancia de este tipo de análisis se puso de manifiesto más claramente a medida que el hombre comprobó que su universo está lleno de ondas y vibraciones tanto al mirar a lo lejos, a las galaxias, como al explorar lo muy cercano, el interior de los átomos.

El estudio de la trigonometría puede enfocarse de dos maneras distintas. Una define la trigonometría como el estudio de <u>funciones de números reales</u>, la otra como el estudio de <u>funciones de ángulos</u>. Las <u>funciones trigonométricas</u> definidas en estas dos formas <u>son idénticas</u>, la diferencia es sólo de punto de vista y está relacionado con las aplicaciones. Así por ejemplo, cuando aplicamos las funciones trigonométricas al estudio del movimiento armónico, debemos considerarlas como funciones del tiempo, que es un número real. En cambio, para las aplicaciones estáticas, como la medición de distancias, direcciones,... , se las considera como funciones de ángulos.

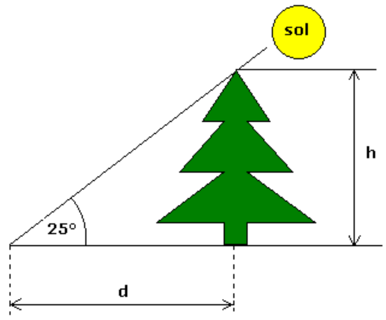
Ambos puntos de vista son independientes, por lo que se puede iniciar el estudio en cualquier orden.

3.3.0 CALCULAMOS ALGUNAS DISTANCIAS

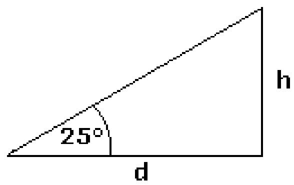
1) Determinación de la altura de un árbol:

Un pino gigante proyecta una sombra de 7,50m. de largo. Calculá la altura del árbol si el ángulo de elevación del Sol es de 25 °.

- Dibujamos un diagrama que represente la situación



- Lo asociamos con un triángulo rectángulo.



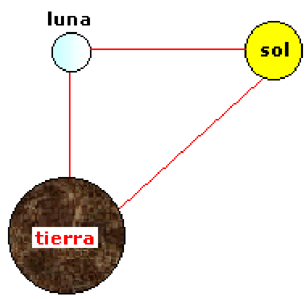
- Como definiremos en los próximos temas, la relación entre los catetos

$\frac{h}{d} = tg\ 25°$ nos permitirá calcular la altura del árbol. ($h = d \cdot tg\ 25°$)

2) Determinación de la distancia Tierra – Sol:

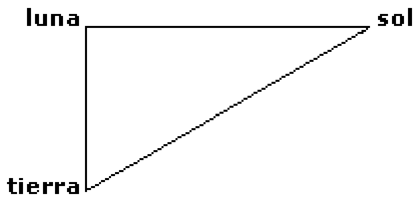
Aristarco esperó hasta que la mitad del disco lunar estuviese iluminada, porque pensó que en ese momento el ángulo Sol – Luna – observador sería recto. Como conocía la distancia Tierra – Luna que él mismo había calculado estudiando un eclipse, le bastó medir el ángulo T y aún con gran error, resolvió el problema.

Calculá la distancia Sol – Tierra, si $\overline{TL} = 384000$ km. y $\hat{T} = 89{,}85°$



SOLUCIÓN

- Dibujamos un triángulo con los datos



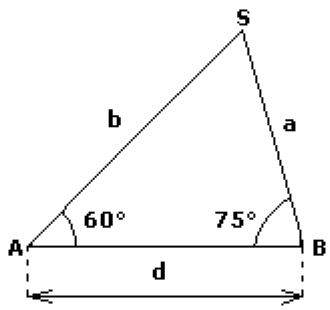
- La relación $\dfrac{\overline{LT}}{\overline{TS}} = \cos\ 89{,}85°$ nos permite calcular la distancia pedida, entonces:

$$\overline{TS} = \frac{\overline{LT}}{\cos\ 89{,}85°} \cong 150 \cdot 10^{6}\,\text{km}$$

3) Rastreo de un satélite:

Un satélite en órbita terrestre pasa directamente por encima de dos estaciones de observación A y B, separadas por 630 km. de distancia. Desde la estación A se lo observa con un ángulo de elevación de 60° y desde la B con un ángulo de 75°. ¿A qué distancia está el satélite de la segunda estación?

- Dibujamos un diagrama para representar la situación

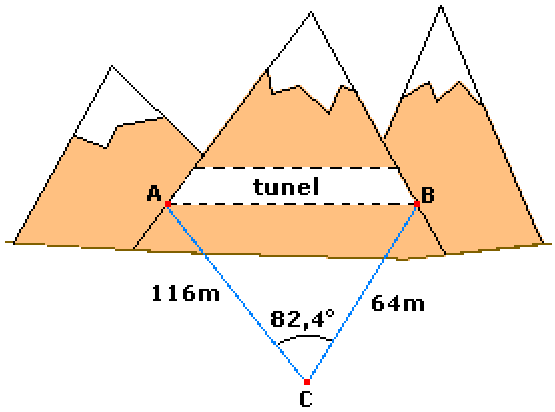


- El triángulo no es rectángulo; con los datos podemos calcular el ángulo S $\rightarrow$ S = 45° y luego aplicar, como analizaremos más adelante, el teorema del seno para determinar la distancia $\overline{SB}$ pedida.

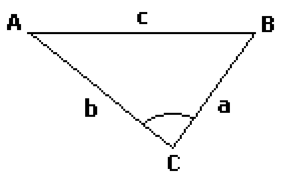
$$\frac{\text{sen}\,60°}{a} = \frac{\text{sen}\,45°}{630} \Rightarrow a = \frac{630 \cdot \text{sen}\,60°}{\text{sen}\,45°}$$

4) Longitud de un túnel:

Se necesita construir un túnel a través de una montaña. Para estimar la longitud del túnel, un topógrafo toma las medidas que se indican en la figura.
Utilizá los datos del topógrafo para calcular la longitud del túnel.



- El triángulo que se observa en la figura no es rectángulo y con los datos es posible aplicar, como analizaremos más adelante, el teorema del coseno



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \,.\, a \,.\, b \,.\, \mathit{cos}\;\; c$$

Sustituyendo los valores

$$c^2 = 64^2 + 116^2 \;\; - 2 \,.\, 64 \,.\, 116 \,.\, \mathit{cos}\; 82{,}4°$$

$$c^2 \cong 15486$$

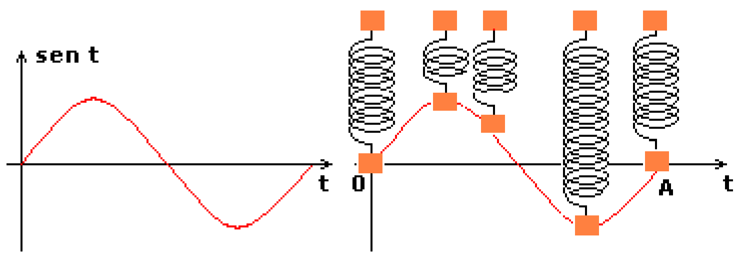
$$c \cong 124{,}4 \text{ m}$$

Luego el túnel tendrá una longitud aproximada de 124 metros.

3.3.1 MODELOS DE COMPORTAMIENTO PERIÓDICO

1) **Resorte en vibración:**

El movimiento de un resorte que vibra, en un medio sin rozamiento, se puede describir – como estudiarás en los cursos de Física – por la función
$y = sen\;\; t$.

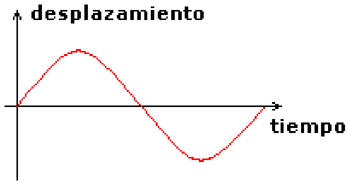


La masa suspendida del resorte retoma su posición original una y otra vez. Un ciclo es una vibración completa, por lo que la masa de la figura completa un ciclo de su movimiento entre o y A.

2) Producción de sonido:

Los fenómenos sonoros se los vincula con la matemática ya desde la época de los pitagóricos, para quienes el estudio de la música fue considerado de naturaleza matemática.

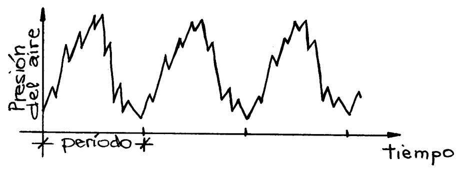
Cuando una fuente sonora (por ejemplo: la voz, un instrumento musical, etc.) comienza a vibrar, las vibraciones se transmiten al aire que lo rodea. Cada una de las moléculas del medio entran sucesivamente en vibración, de modo que la vibración que se inició en el instrumento, se va propagando con una determinada velocidad que depende del medio en que viaja. La onda sonora no arrastra a las partículas del medio, pues no hay transporte de materia, sino que sufren desplazamientos en torno a su posición original.



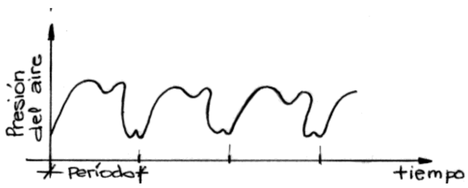
Si desplazamos el estado de vibración de cada molécula de aire, durante el paso de la onda sonora, para un cierto instante t_o , obtenemos un gráfico de la forma:

Por el tipo de gráfico, las funciones trigonométricas, seno o coseno, constituyen un modelo adecuado para describir la onda sonora.

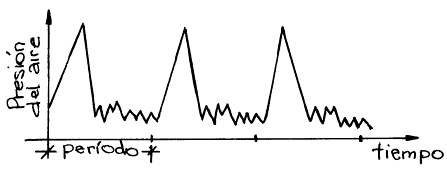
Los siguientes gráficos muestran los sonidos producidos por distintos instrumentos, en todos ellos observamos que una parte de la onda se repite, luego de T segundos, por eso reciben el nombre de periódicas y T es su período.



Formato de onda de un violín



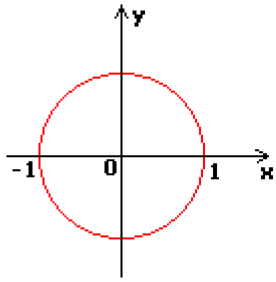
Formato de onda de un piano



Formato de onda de un violín electrónico

NOTA: Recordamos algunas propiedades de los puntos terminales en la circunferencia unitaria necesarias para definir las funciones trigonométricas.

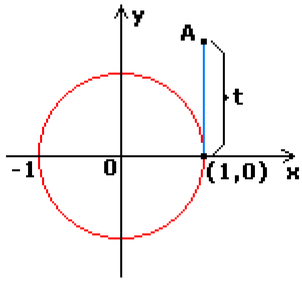
3.4.0 CIRCUNFERENCIA UNITARIA Y PUNTOS TERMINALES



Consideremos en un sistema de coordenadas cartesianas, la circunferencia con centro en el origen y radio 1, a la que se llama: <u>circunferencia unitaria</u>

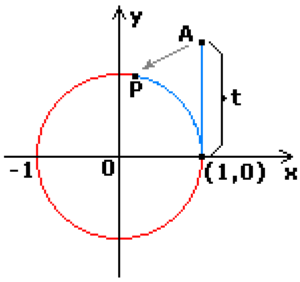
$$x^2 + y^2 = 1$$

Sea t un número real cualquiera comprendido entre 0 y 2π , es decir: $0 \leq t < 2\pi$. Trazamos el segmento perpendicular al eje x , con origen en (1,0) y longitud t.



Si trasladamos el punto A hacia la circunferencia, el punto A coincidirá con un <u>único punto P</u> en la circunferencia unitaria.

Si el número t es negativo, de manera análoga podemos asignarle un único punto P' sobre la circunferencia unitaria, considerando el segmento con origen en (1,0) y A hacia abajo.

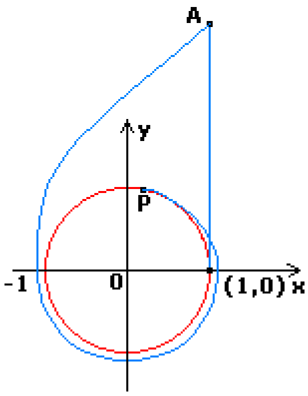


En este caso recorremos la circunferencia en sentido horario y la longitud del segmento es el número <u>positivo</u>: - t .

Si $t \geq 2\pi$ con el mismo procedimiento podemos asignarle un <u>único</u> punto P', pero ahora el arco con extremos en (1,0) y P' da más de una vuelta a la circunferencia.

Luego:

> A <u>cada número real *t* le corresponde un único punto en la circunferencia unitaria</u>, que llamamos: P(t)

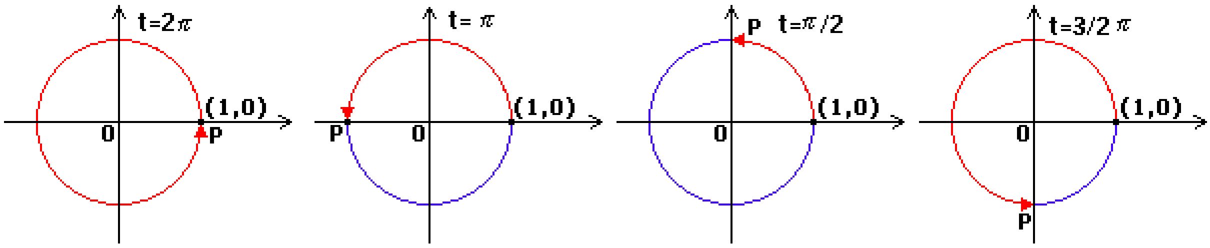


La circunferencia unitaria tiene una longitud: $L = 2\pi \cdot r = 2\pi \cdot 1 = 2\pi$.

Entonces:

- Si un punto comienza en (1,0), se mueve en sentido antihorario, recorre toda la circunferencia y regresa a (1,0), recorre una distancia igual a 2π.
- Si realiza la mitad del recorrido, se mueve una distancia igual a $\frac{1}{2}(2\pi) = \pi$.
- Si se desplaza la cuarta parte, recorre una distancia igual a $\frac{1}{4}(2\pi) = \frac{\pi}{2}$.
- Si el desplazamiento corresponde a las tres cuartas partes del inicial, la distancia es igual a $\frac{3}{4}(2\pi) = 3\frac{\pi}{2}$.

En las figuras se observan las posiciones inicial y final de las situaciones anteriores.



> Como la circunferencia tiene longitud 2π, el punto correspondiente a $t + 2\pi$ coincide con el punto correspondiente a t, cualquiera que sea t.
>
> Luego:
>
> $P(t) = P(t + 2\pi)$
>
> Condición que caracteriza a las funciones periódicas

3.4.1 CÁLCULO DE PUNTOS TERMINALES

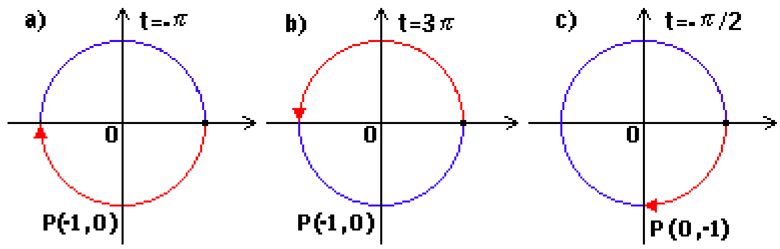
Para determinar el valor de puntos terminales podemos proceder, según la situación, de dos maneras:

- desde la información gráfica
- utilizando la ecuación de la circunferencia: $x^2 + y^2 = 1$

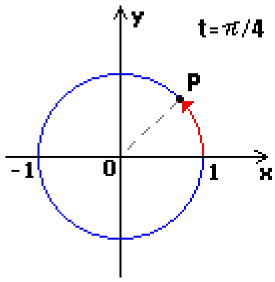
1) Calculá el punto terminal si

a) $t = -\pi$ b) $t = 3\pi$ c) $t = -\frac{\pi}{2}$

Graficamos y obtenemos el valor en cada caso:



Diferentes valores de t pueden determinar el mismo punto terminal



2) Calculá el punto terminal si $t = \dfrac{\pi}{4}$

El punto P está ubicado sobre la recta $y = x$ (bisectriz del primer cuadrante). Luego P está en la intersección de la circunferencia: $x^2 + y^2 = 1$ con la recta $y = x$. Sustituyendo en la ecuación obtenemos:

$$x^2 + y^2 = 1$$
$$2\,x^2 = 1$$
$$x^2 = \frac{1}{2}$$
$$|x| = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como P está en el primer cuadrante es $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ y como $y = x$ entonces:

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Luego si $t = \dfrac{\pi}{4}$ es P $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Utilizando los valores de la tabla, calculá los valores correspondientes a:

$t = 2\,\pi/3$;	$t = 4\,\pi/3$;
$t = 3\,\pi/4$;	$t = 3\,\pi/2$;
$t = 5\,\pi/6$;	$t = 5\,\pi/3$;
$t = \pi$;	$t = 7\,\pi/4$;
$t = 7\,\pi/6$;	$t = 11\pi/6$;
$t = 5\,\pi/4$;	$t = 2\,\pi$;

La tabla muestra los puntos terminales para algunos valores especiales de t, si t está en el primer cuadrante:

t	**Punto terminal**
0	(1,0)
$\dfrac{\pi}{6}$	$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$
$\dfrac{\pi}{4}$	$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\dfrac{\pi}{3}$	$\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\dfrac{\pi}{2}$	(0,1)

3.5.0 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE NÚMEROS REALES

Recordá que para determinar el punto terminal P (x ,y) correspondiente a un número real dado t, nos desplazamos una distancia t a lo largo de la circunferencia unitaria, partiendo del punto (1,0). Nos movemos en sentido antihorario, si $t > 0$, y en sentido horario, si $t < 0$

Si x e y son la abscisa y ordenada del punto P (t) definimos:

$$x = cos\ t \qquad ; \qquad y = sen\ t$$

A partir de estas funciones podemos definir, también utilizando las coordenadas de P (x, y), las funciones: tangente, cotangente, secante y cosecante.

$$tg\ t = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0) \qquad ; \qquad cotg\ t = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0)$$

$$sec\ t = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0) \qquad ; \qquad cosec\ t = \frac{1}{y} \quad (y \neq 0)$$

Como las funciones trigonométricas pueden definirse en términos de la circunferencia unitaria, se las suele llamar funciones circulares.

Como los puntos de la circunferencia unitaria verifican la ecuación

$$x^2 + y^2 = 1$$

sustituyendo los valores de la definición, obtenemos:

$$sen^2\ t + cos^2\ t = 1$$

que recibe el nombre de identidad pitagórica.

3.5.1 VALORES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

El valor de la función trigonométrica depende del punto terminal P (x, y), luego el signo depende del cuadrante en el cual está el punto terminal de t. Si el punto P (x, y) está en el II cuadrante, las funciones seno y cosecante son positivas y las demás negativas.

La siguiente tabla muestra algunos valores especiales de las funciones trigonométricas. Más adelante demostraremos cómo se obtienen los valores de las funciones trigonométricas.

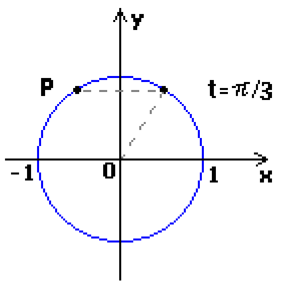
Tabla 1:

t	*sen t*	*cos t*	*tg t*	*csc t*	*sec t*	*ctg t*
0	0	1	0	--	1	--
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	--	1	--	0

☞ Calculá cada uno de los siguientes valores:

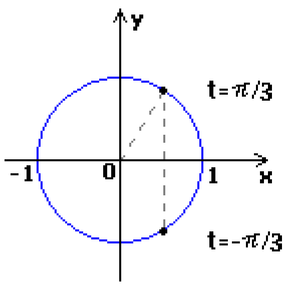
a) $cos\left(2\frac{\pi}{3}\right)$ b) $tg\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ (c) $sen\left(19\frac{\pi}{4}\right)$

SOLUCIÓN:



a) El valor de referencia a 2 π/3 en el 1er cuadrante es π/3 ; y según la tabla el coseno vale 1/2 , pero como 2 π/3 está en el 2do cuadrante el signo es negativo.

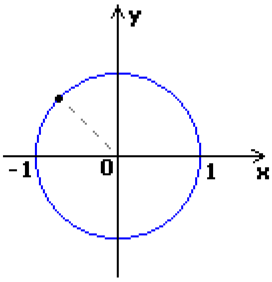
$$\text{Entonces: } cos\left(2\frac{\pi}{3}\right) = -\,cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$



b) El valor de referencia a -π/3 es π/3 ; y según la tabla la tangente vale $\sqrt{3}$, pero como - π/3 está en el 4to cuadrante, el signo es negativo.

$$\text{Entonces: } tg\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\,tg\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

c) Primero calculamos el valor correspondiente a $0 \le t < 2\pi$, es decir, $19\ \pi/4 - 4\pi = 3\ \pi/4$. Luego calculamos el valor de referencia a $3\ \pi/4$ que es $\pi/4$; según la tabla el seno vale $\frac{\sqrt{2}}{2}$ y como el valor $3\ \pi/4$ está en el 2^{do} cuadrante, el valor es positivo.



$$\text{Entonces: } sen\left(19\frac{\pi}{4}\right) = sen\left(3\frac{\pi}{4}\right) = sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

¿?

¿Cómo calculamos el valor de las funciones para valores de *t* que no están en la tabla?

Las calculadoras científicas permiten realizar los cálculos con gran rapidez, pero ... debe estar en <u>modo radianes</u> para evaluar estas funciones

Así por ejemplo, redondeando los resultados a tres decimales, tenemos:

$a) sen\ 1{,}5 = 0{,}997$
$b) cos\ 2{,}4 = -0{,}737$
$c) tg\ 3{,}9 = 0{,}947$

☺

El número π es la razón entre la circunferencia y el diámetro de un círculo. Desde la antigüedad se sabía que esta razón es la misma para todos los círculos. El primer esfuerzo sistemático para determinar una aproximación numérica para π lo llevó a cabo Arquímedes (~ 240 a.C.) quien demostró que 22/7< π <223/71 al determinar los perímetros de polígonos regulares inscritos y circunscritos a un círculo.
Aproximadamente en el año 480 d. C., el físico chino Tsu Ch' ung dio la aproximación

$$\pi \approx \frac{355}{113} = 3{,}141592.....$$

que es correcta hasta seis decimales, y se conservó como la estimación más precisa de π hasta que el matemático holandés Adrianus Romanus (1593) utilizó polígonos con más de mil millones de lados para calcular a π correctamente hasta 15 decimales. En el siglo XVII, los matemáticos empezaron a utilizar series infinitas así como identidades trigonométricas en la búsqueda de π. El inglés Williams Shanks pasó 15 años (1858-1873) usando esos métodos para calcular π hasta 707 decimales, pero en 1946 se descubrió que sus cálculos estaban equivocados a partir del 528avo decimal. Hoy día con la ayuda de las computadoras ha sido posible determinar π correctamente con miles e incluso millones de decimales. En 1991, David y Gregory Chudnovsky utilizaron su computadora de escritorio especialmente diseñada para determinar los primeros 2,160 millones de dígitos de π (el récord de ese momento). El récord actual es propiedad de Jonathan y Peter Borwein.

3.6.0 GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Graficamos las funciones seno y coseno, analizamos sus propiedades y características más importantes.

Como observamos anteriormente el punto terminal P (*x*, *y*) determinado por *t* es el mismo que el determinado por $t + 2\pi$, luego las funciones seno y coseno definidas por las coordenadas de P (*x*, *y*) no cambian al sumar cualquier múltiplo entero de 2π , es decir:

$$sen\,(t + 2k\pi) = sen\,t \qquad \forall\ k \in Z$$

$$cos\,(t + 2k\pi) = cos\,t \qquad \forall\ k \in Z$$

Luego las funciones seno y coseno son ***periódicas*** ya que cumplen con la definición:

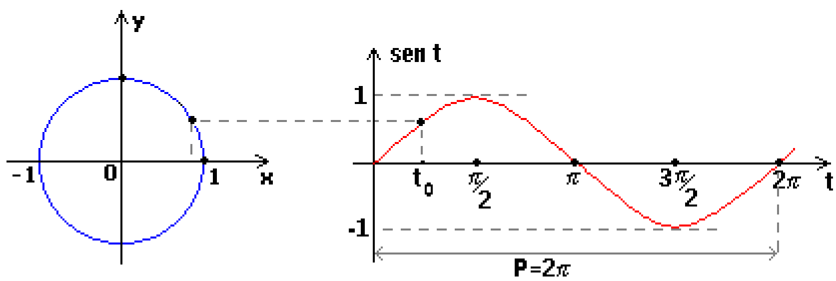
Una función **f** es ***periódica*** si existe un número positivo **p** tal que:

f (t + p) = f(t) para todo **t**.

El número positivo **p** más pequeño (si existe) se llama ***período*** de **f**

3.6.1 GRÁFICA DE LA FUNCIÓN SENO

- Dibujamos la gráfica de un período.
- Recordá que sen t es la ordenada del punto terminal P(x, y)
- El valor de "y" aumenta hasta 1 y luego disminuye hasta –1



3.6.2 CARACTERÍSTICAS DE LA FUNCIÓN SENO

- Dominio: como t puede tomar todos los valores reales entonces: Df = R
- Imagen: los valores de sen t corresponden a las ordenadas de los puntos de una circunferencia unitaria, se verifica:

$$-1 \leq sen\,t \leq 1, \text{ por lo tanto Imf} = [\,-1{,}1\,]$$

- Periodicidad: como ya observamos, la función es periódica, de período 2π
  $sen\,(t + 2k\pi) = sen\,t \qquad \forall\ \kappa \in Z$

En el intervalo [0,2π)

- Crecimiento y decrecimiento

  La función crece en $(0, \frac{\pi}{2})$ y en (3/2 π , 2π) y decrece en (π/2,3/2π)

- Máximos y mínimos

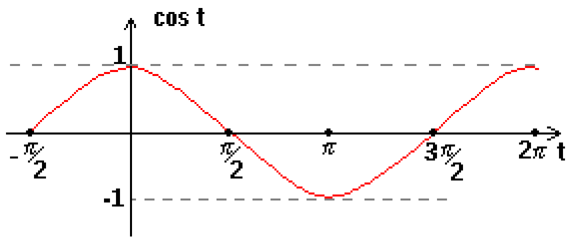
  La función alcanza su valor máximo y = 1 en x = π/2 y su valor mínimo y = -1 en x = 3/2π

- Ceros: La función se anula en x = 0 y x = π es decir f(0) = 0 y f(π) = 0

- Función impar: sen t = -sen (-t)

3.6.3 GRÁFICA DE LA FUNCIÓN COSENO

Para gráficar esta función utilizamos un procedimiento análogo al de la función seno, pero recordando que el coseno es la abscisa del punto terminal P(x, y).El gráfico es el siguiente.



3.6.4 CARACTERÍSTICAS DE LA FUNCIÓN COSENO

Con un análisis análogo al realizado para la función seno, se llega a las siguientes conclusiones:

- Dominio: Df =R
- Imagen: If = [-1,1]
- Periodicidad: periódica de período 2π, luego cos (t + 2kπ) = cos t $\forall$ k ∈ Z

En el intervalo [0,2π)

- Crecimiento y decrecimiento
  La función crece en el intervalo (π, 2π) y decrece en (0, π)
- Máximos y mínimos
  La función alcanza su máximo valor y = 1 en x = 0 y su mínimo valor y =-1 en x = π
- Ceros :
  La función se anula en x = π/2 y en x = 3/2π
  Luego: f (π/2) = 0 y f (3/2π) = 0

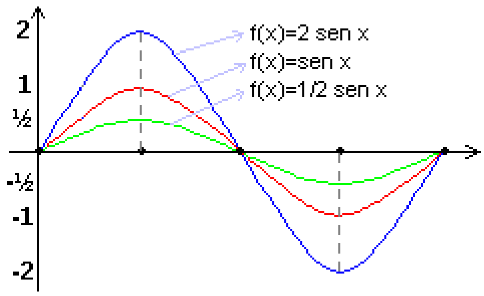
- Función par: cos t = cos (-t)

Analizamos las modificaciones que se observan en la función seno si se introducen ciertas constantes. Por ejemplo

a) f (x) = k . sen x
b) f (x) = sen kx
c) f (x) = k + sen x
d) f(x) = sen (x-k)

a) El parámetro "k " determina la imagen de la función .Al valor de k se lo denomina amplitud de la onda.

Graficamos para k =1/2; k =1; k =2 o sea f (x) = ½ sen x; f(x) = sen x ; f(x) = 2 sen x

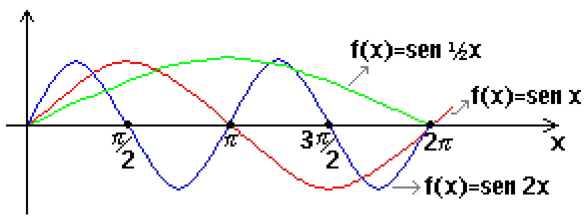


b) El parámetro "k" determina el período de la función. Si $k \neq 0$, el período de

$$f(x) = senkx \;\; es \; T = \frac{2\pi}{|k|}$$

- Si k>1 el gráfico se obtiene por compresión horizontal de sen x
- Si 0 < k <1 por una dilatación horizontal

Graficamos para k=1; k=2 ; k=1/2
O sea: f(x) = sen x ; f (x) = sen 2x ; f(x) = sen ½ x



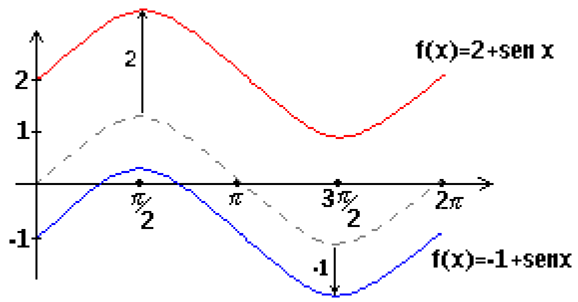
c) El parámetro “k” desplaza la función hacia arriba o hacia abajo , según sea positivo o negativo.
Graficamos para k = 2y y k = -1 , o sea

F(x) = 2 + sen x
F(x) = -1 + sen x

¿?

¿Que relación existe entre las gráficas de f(x) = sen (-x) y f (x) = -sen x ?

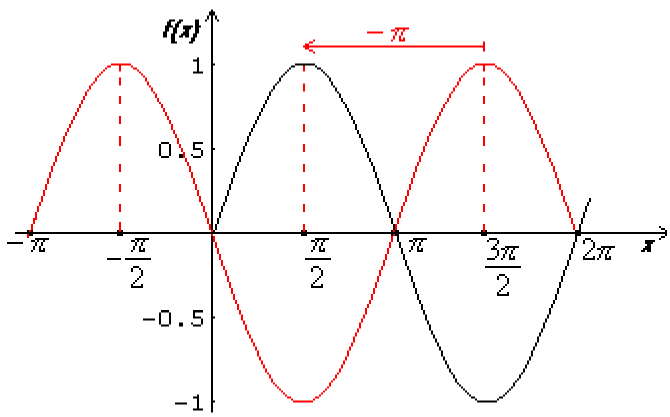
Justificá tu respuesta



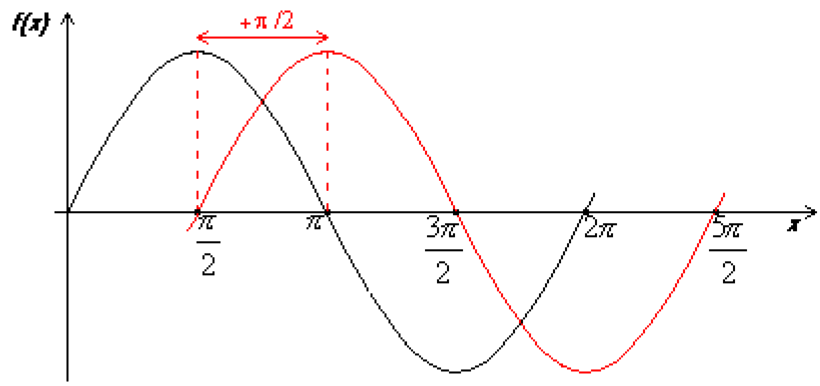
d) El parámetro “k” traslada la función hacia la derecha o hacia la izquierda, según sea positivo o negativo.
Graficamos para k = π/2 ; k = -π , o sea

En base a las modificaciones que se observan en la función seno, analizá su correspondencia con la de la función coseno y graficá.

a) f (x) = cos 2x
b) f (x) =- ½ cos x
c) f (x) = -3 + cos x
d) f (x) = ½ + cos x
e) f (x) = cos (x + π/2)
f) f (x) = cos (x-π)



f(x) = sen (x + π)



f(x) = sen (x – π/2)

3.6.6 GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES: TANGENTE, COTANGENTE, SECANTE, COSECANTE

Las funciones tangente y cotangente tienen un período P = π

tg (x + π) = tg x ; cotg (x + π) = cotg x

Dominio

- La función tangente $\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

  no está definida en todos los valores donde cos x =0 , es decir si

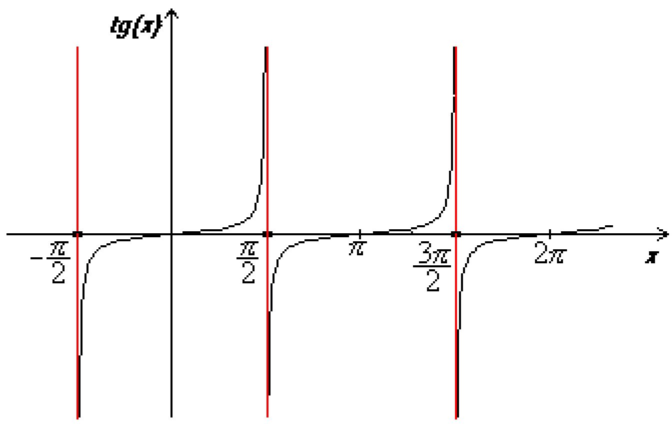
  x = π/2 ; x = 3/2 π; ....x = π/2 (2k +1) con $k \in Z$

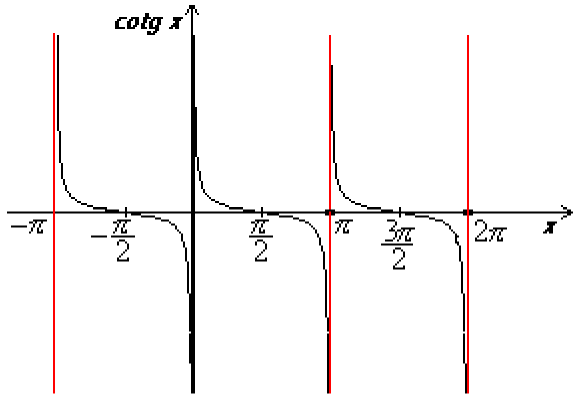
Luego Df = R -{ (2 k + 1) π/2 , $\kappa \in \mathbb{Z}$ }

- La función cotangente $\cot g \quad x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

  no está definida en todos los valores donde sen x = 0 , es decir , si x = 0 ; x = π ; x = 2π ; ......x = k π , con $\kappa \in \mathbb{Z}$

  luego Df = R - {k π , $\kappa \in \mathbb{Z}$ }



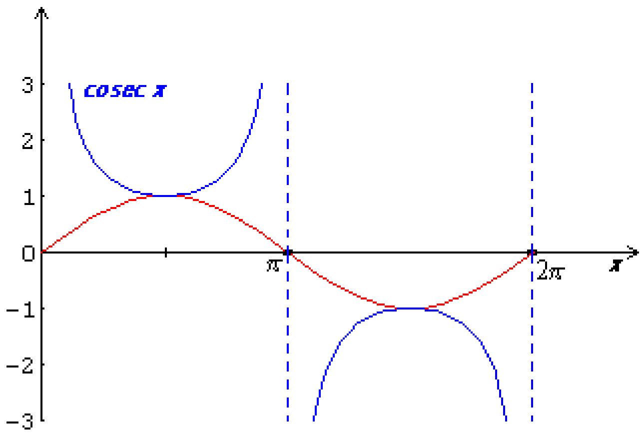


Para trazar los gráficos de la secante y la cosecante utilizamos las identidades recíprocas

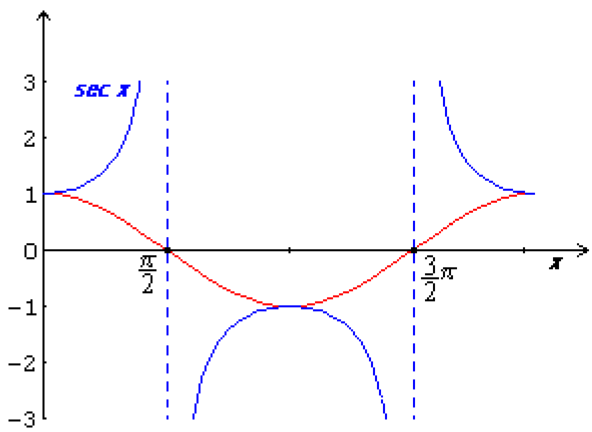
¿?

¿ Cuál es el dominio de las funciones cosecante y secante?

¿ Cuál es su período?



$$cosec \quad x = \frac{1}{senx}$$



$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

ACTIVIDADES

1) Relacioná expresión, características y gráfico

a) $f(x)=\cos(2x)$

b) $f(x)=2\cdot \operatorname{sen} x$

c) $f(x)=3\cdot \cos x-1$

d) $f(x)=\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x-\pi\right)$

e) $f(x)=-2\cdot \cos\left(\frac{1}{3}x+\pi\right)$

f) $f(x)=3\cdot|\operatorname{sen} x|$

i. Período: 6π e $\operatorname{Im} f=[-2,2]$

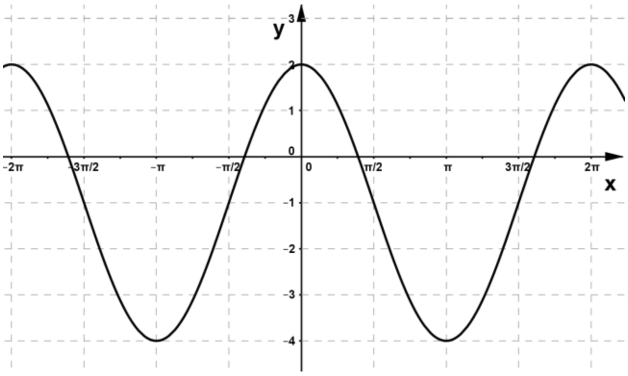
ii. Período: π e $\operatorname{Im} f=[-1,1]$

iii. Período: 4π e $\operatorname{Im} f=[-1,1]$

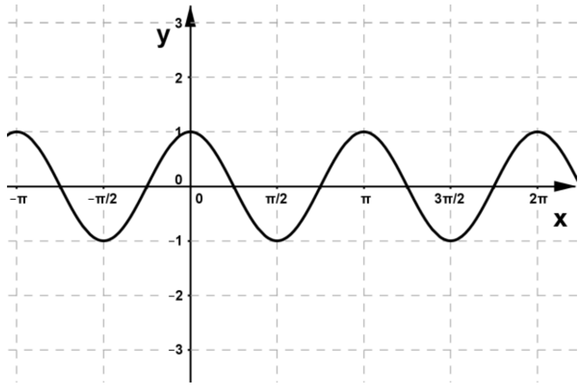
iv. Período: 2π e $\operatorname{Im} f=[-4,2]$

v. Período: 2π e $\operatorname{Im} f=[0,3]$

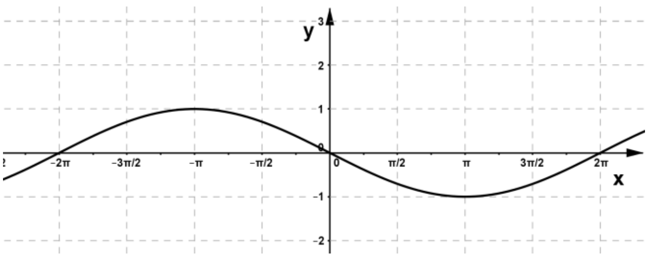
vi. Período: 2π e $\operatorname{Im} f=[-2,2]$



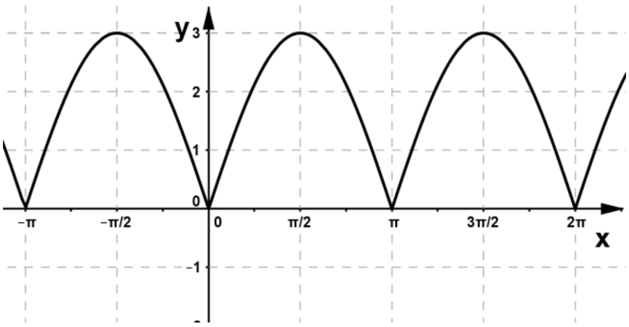
Función 1



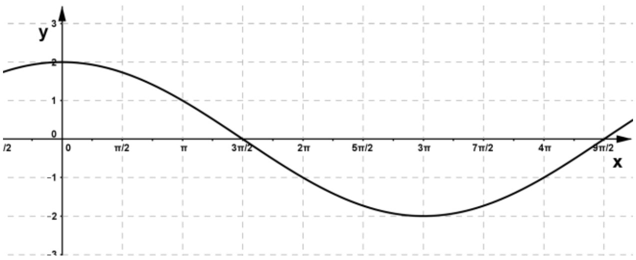
Función 2



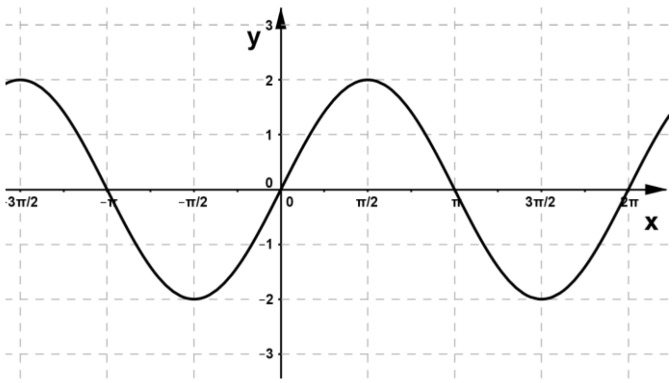
Función 3



Función 4



Función 5



Función 6

2) Realizá la gráfica de las siguientes funciones. En cada caso, indicá dominio, imagen y período.

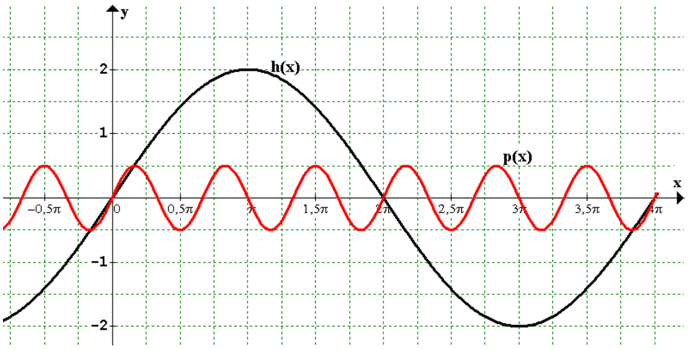
a) $f(x) = 1 - \cos(x - \pi)$ **b)** $f(x) = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

c) $f(x) = -3.\operatorname{sen}(2x)$ **d)** $f(x) = |\cos\ x|$

e) $f(x) = -2 + \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$ **f)** $f(x) = 2.\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

g) $f(x) = 4 - 2.\operatorname{sen}x$ **h)** $f(x) = \operatorname{sen}|x|$

3) Para las funciones **h** y **p** representadas en el siguiente gráfico:



a) Hallá la fórmula sabiendo que son del tipo $y = a \cdot \operatorname{sen}(bx)$

b) Indicá amplitud y el período.

4) En cada caso, encontrá la expresión de la función trigonométrica que cumpla con las condiciones pedidas, sabiendo que es de la forma: $y = a \cdot \operatorname{sen}(bx + c) + d$

a) $\operatorname{Im} f = [-5;5]$ y realiza tres períodos completos en $[0, 2\pi]$

b) Tiene período 4π, su máximo vale 10 y su mínimo 2. Su ordenada al origen es 6.

c) Se desplaza π unidades hacia la izquierda, tiene período π y se refleja sobre el eje X.

d) $\operatorname{Im} f = [-5,1]$, tiene amplitud 3, período 2π y se desplaza 2 unidades hacia abajo.

Resolvé la misma actividad con la función $y = a \cdot \cos(bx + c) + d$. ¿Qué similitudes y diferencias observás?

5) Dada la función trigonométrica: $f(x) = (2+m)^2 \cdot \cos((m+1) \cdot x + \pi)$

Determiná el o los valores reales de m para que la función cumpla con las condiciones pedidas en cada caso:

a) Período 6π.

b) $\operatorname{Im} f = [-4, 4]$.

c) $f(0) = 4$

6) Siempre que el sentido positivo sea considerado hacia arriba, si un cuerpo está vibrando, la función $f(t)=8\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}\cdot t\right)$ mide la distancia (en cm) dirigida del cuerpo desde su posición central (considerada en el origen) después de t segundos. Respondé:

a) ¿Cuál será el máximo desplazamiento?

b) ¿Cuántos segundos deberán transcurrir para que se produzca una vibración completa del cuerpo?

c) ¿Qué sucede al transcurrir un segundo?

7) Cada vez que el corazón late, la presión sanguínea primero se incrementa y luego disminuye, cuando el corazón descansa entre latido y latido. La presión máxima y mínima se llaman presión sistólica y presión diasistólica, respectivamente, y se considera normal una lectura de 120 / 80.

La presión sanguínea de una persona está modelada por la función: $P(t)=25\cdot\text{sen}(160\pi\cdot t)+115$, donde P(t) es la presión en milímetros de mercurio (mmHg) y t es el tiempo, medido en minutos.

a) Determiná el período e interprétalo en términos del problema.

b) Calculá el número de latidos por minuto.

8) El período rítmico de respiración consiste en intervalos alternos de inhalación y exhalación. Por lo general, un ciclo completo tiene lugar cada 5 segundos. Si f(t) denota el volumen de circulación de aire en el instante t (en litros por segundo) y si el volumen máximo es de 0,6 litros por segundo, encontrá la fórmula de la forma $f(t)=a\cdot\text{sen}(b\cdot t)$ que se adapte a la información.

3.7.0 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS

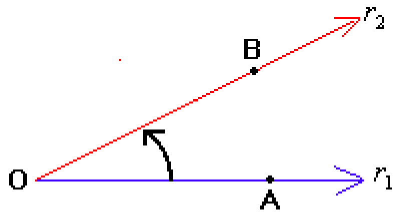
Como planteamos en los problemas de 3.1.0., para calcular distancias a puntos inaccesibles es posible considerar el método de triangulaciones , que se basa en la propiedad de resolver trigonométricamente un triángulo.

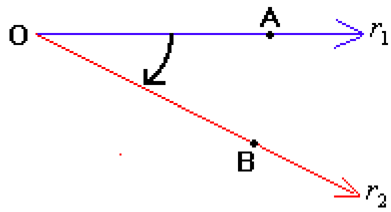
Si en un triángulo se conocen un lado y dos de sus ángulos o bien dos lados y el ángulo comprendido, es posible calcular fácilmente los restantes elementos del triángulo.

Para resolver estos problemas presentamos las funciones trigonométricas como funciones de ángulos, es decir, funciones que asocian a cada ángulo un número real

3.7.1 ÁNGULOS

Un ángulo A O B consta de dos semirrectas r_1 y r_2, con un origen común: O.





Interpretamos un ángulo como la rotación de r_1 hacia. r_2 En este caso a r_1 se lo llama lado inicial y a r_2 se lo llama lado terminal del ángulo. Si el sentido de la rotación es antihorario el ángulo se considera positivo y si el sentido es horario se lo considera negativo.

3.7.2 SISTEMAS DE MEDICIÓN

- **Sistema sexagesimal**: es uno de los sistemas más usados. Su unidad de medida es el ángulo igual a la noventa ava parte del ángulo recto y se lo llama grado sexagesimal

En símbolos

$$\boxed{\frac{1\, \acute{a}ngulo\, recto}{90} = 1^{o}}$$

Los submúltiplos son el minuto y segundo sexagesimal, que se definen:

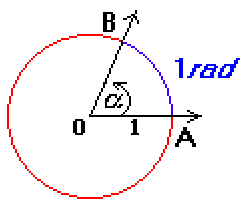
$$\boxed{\frac{1}{60} = 1\,'\,(minuto)} \qquad \boxed{\frac{1\,'}{60} = 1\,''\,(segundo)}$$

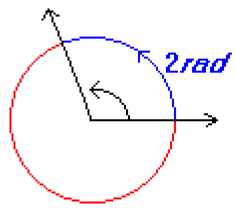
- **Sistema radial**

Se define la unidad de medida de la siguiente manera: se traza una circunferencia de radio 1 con el vértice del ángulo coincidiendo con su centro, la medida de ese ángulo es de un radián (rad) si el arco de circunferencia que abarca tiene una longitud igual al radio de la misma

$$1\ rad = \frac{long\ AB}{OA} = \frac{long\ AB}{1}$$

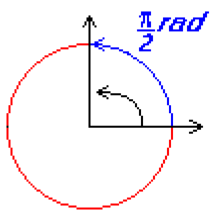
$$1\ rad = \frac{180°}{\pi} \cong 57.296°$$

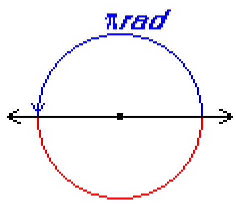




RELACIÓN ENTRE GRADOS Y RADIANES

$1\ rad = \frac{180°}{\pi}$; $180° = \pi\ rad$; $1° = \frac{\pi\ rad}{180}$





Para convertir grados a radianes : $\alpha' = \frac{\pi}{180°}\alpha°$

Para convertir radianes a grados : $\alpha° = \frac{180°}{\pi}\alpha'$

a) Expresá 120 ° en radianes
b) Expresá 2.5 rad. en grados sexagesimales

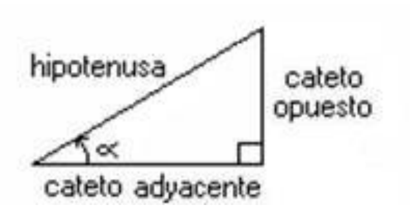
SOLUCIÓN: Usando la relación entre grados y radianes obtenemos

a) $120° = 120° \frac{\pi}{180°}\ rad = \frac{2}{3}\pi\ rad$

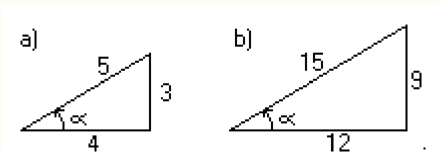
b) $2.5\ rad = \frac{180°}{\pi} 2.5 \cong \frac{180°\ 2.5}{3.1416} \cong 143°\ 14'\ 20''$

3.8.0 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Consideramos un triángulo rectángulo.que tiene α como uno de sus ángulos agudos Podemos definir relaciones entre sus lados del siguiente modo.



RAZONES TRIGONOMÉTRICAS	
$\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{cat.\,op.}{hip.}$	$\cos\alpha = \dfrac{cat.\,ady.}{hip.}$
$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{cat.\,op.}{cat.\,ady.}$	$\cot g\alpha = \dfrac{cat.\,ady.}{cat.\,op.}$
$\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{hip.}{cat.\,op.}$	$\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{hip.}{cat.\,ady.}$

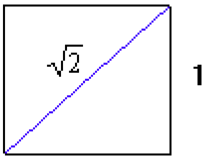


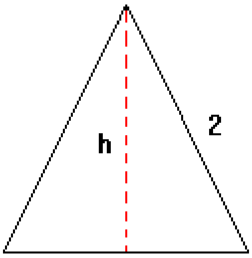
en a) $\begin{cases} \operatorname{sen}\alpha = 3/5 \\ \cos\alpha = 4/5 \end{cases}$

en b) $\begin{cases} \operatorname{sen}\alpha = 9/15 = 3/5 \\ \cos\alpha = 12/15 = 4/5 \end{cases}$

Los triángulos de la figura, para igual valor de α son semejantes, luego las razones son iguales independientemente del tamaño del triángulo, sólo dependen del ángulo

3.8.1 TRIÁNGULOS ESPECIALES





En algunos triángulos rectángulos se pueden calcular sus elementos con facilidad aplicando el teorema de Pitágoras.

- En un cuadrado de lado 1 se traza la diagonal y se obtiene un triángulo cuyos ángulos miden 45º, 45º y 90º y su hipotenusa $\sqrt{2}$.
- En un triángulo equilátero de lado 2 se traza la altura y se obtiene un triángulo cuyos ángulos miden 30º, 60º y 90º y sus lados 1, 2 y $\sqrt{3}$.

Con estos datos y las definiciones dadas es posible calcular las relaciones trigonométricas para ángulos de 30º, 45º y 60º

(o lo que es equivalente $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{\pi}{3}$).

Los valores están en la siguiente tabla, verificá los resultados.

α (grados)	α (radianes)	Sen (α)	Cos (α)	Tg (α)
0º	0	0	1	0
30º	π / 6	½	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45º	π / 4	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60º	π / 3	$\sqrt{3}/2$	1 / 2	$\sqrt{3}$
90º	π / 2	1	0	-

Para calcular los valores de las razones trigonométricas para otros ángulos utilizaremos la calculadora.

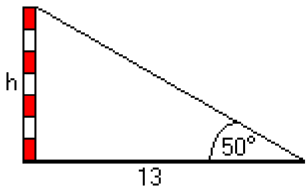
☞ Verificá si tu calculadora está en el modo correspondiente.

- **sin 2** indica el seno de un ángulo cuya medida es 2 radianes, se pasa la calculadora al modo en radianes (RAD) y se obtiene: sin 2 $\cong$ 0,9093
- Si se necesita calcular sin 2º , se pasa la calculadora al modo en grados (DEG) y se obtiene sin 2º $\cong$ 0,0349

3.8.2 RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Resolver trigonométricamente un triángulo rectángulo consiste en, dados dos de sus elementos, calcular los elementos restantes

1) Calculá la altura de una torre si su sombra mide 13m cuando los rayos de sol forman un ángulo de 50º con la horizontal.

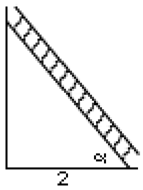


SOLUCIÓN:

- Dibujamos el triángulo asociado a los datos del problema.
- Identificamos la incógnita altura (h).
- Los datos son: el ángulo de 50º con la horizontal y la longitud de la sombra l = 13m.
- La razón trigonométrica que relaciona los datos y la incógnita es la

<u>tangente</u> : $\frac{h}{l}$ = tg 50º → h = 13m. tg 50º ≅ 15,5m

2) Una escalera de 4m está apoyada contra la pared. ¿Cuál es su inclinación si su base dista 2m de la pared?

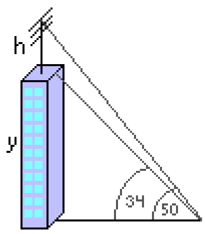


SOLUCIÓN:

- Dibujamos el triángulo asociado a los datos del problema.
- La incógnita es el ángulo de inclinación α .
- Con los datos del problema, cateto adyacente e hipotenusa podemos calcular α aplicando la relación del <u>coseno</u>.

cos α $= \frac{cat.adyacente}{hipotenusa} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, aplicando la función inversa arco coseno obtenemos: $\hat{\alpha}$ = 60º

3) Una antena de televisión se instala sobre el techo de un edificio desde un punto que está al nivel del pie del edificio, a 75m de distancia, los ángulos de elevación de la base y del extremo superior de la antena miden 34º y 50º respectivamente. ¿ Cuál es la altura de la antena?.



SOLUCIÓN:

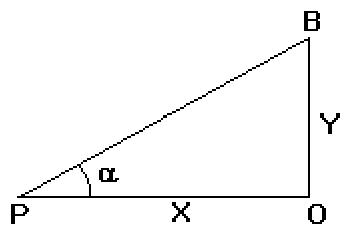
- Dibujamos un diagrama de la situación.
- La altura de la antena " h " la podemos calcular h = H – y
- Calculamos cada uno de estos valores

$\frac{H}{75}$ = tg 50º → H = 75.tg 50º ≅ 89,4m

$\frac{y}{75}$ = tg 34º → y = 75.tg 34º ≅ 50,6m

Luego la altura de la antena es

h = 89,4m – 50,6m = 38,8m ≅ 39m



Sea BOP un triángulo rectángulo con un ángulo agudo α , ubicamos el ángulo $\hat{\alpha}$ de modo que su lado inicial coincida con el eje x y el vértice con el origen de coordenadas. El punto P = P(x, y) es un punto del lado terminal.

En el triángulo BOP el cateto adyacente tiene una longitud x, el opuesto y, aplicando el teorema de Pitágoras calculamos la hipotenusa

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Entonces:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{y}{r} \quad ; \quad \cos\alpha = \frac{x}{r} \quad ; \quad \text{tg}\,\alpha = \frac{y}{x}$$

Luego podemos ampliar la definición de las razones trigonométricas a cualquier tipo de ángulo.

- Sea α el ángulo tal que: P (x, y) está en el lado terminal y su distancia r al origen es 1.

Según la definición de las funciones trigonométricas del ángulo α, se tiene:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{y}{1} = y \quad ; \quad \cos\alpha = \frac{x}{1} = x$$

- Si P(x, y) es también el punto terminal de un arco de longitud t.

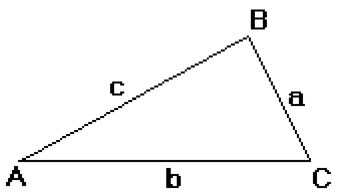
De acuerdo con la definición de las funciones trigonométricas del número real t se tiene:

$$\text{sen}\,t = y \quad ; \quad \cos t = x$$

- Si α se mide en radianes entonces: α = t

- Comparando las dos maneras de definir las funciones trigonométricas concluimos que dan valores idénticos

3.9.0 TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS



Teorema del Seno

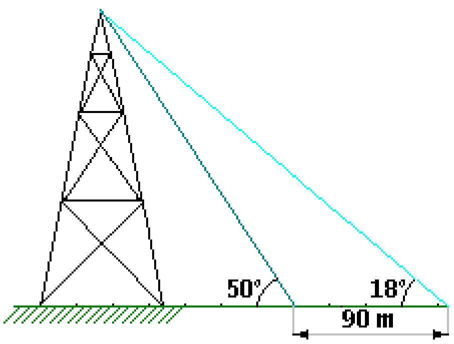
En el triangulo ABC se verifica

$$\frac{senA}{a} = \frac{senB}{b} = \frac{senC}{c}$$

Teorema del Coseno

En el triangulo ABC se verifica

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2.c.b.\cos A$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2.c.a.\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos C$$



Las funciones trigonométricas se pueden utilizar para resolver triángulos no rectángulos, como en los ejemplos (3) y (4) de 3.1.0

En estos casos se aplican las fórmulas del seno o del coseno, según los datos del problema.

MÁS EJEMPLOS

1. ¿Cuál es la altura de una torre si el ángulo de elevación disminuye de 50º a 18º cuando un observador que está situado a una cierta distancia del pie de la torre, se aleja 90m en la misma dirección?.

SOLUCIÓN:

- Dibujamos un diagrama con los datos.
- El problema puede resolverse por dos caminos.

a) Usando triángulos rectángulos

En el triángulo ABC se verifica la relación: tg 50º = $\frac{h}{x}$ (1)

En el triángulo ABD se verifica la relación: tg 18º = $\frac{h}{x+90}$ (2)

De (1) se tiene h = x. tg 50º

De (2) se tiene h = (x + 90). tg 18º

Igualando los segundos miembros se tiene:

$$x.tg\ 50º = (x + 90).tg\ 18º$$
$$x.1{,}2 = (x + 90).0{,}32$$
$$x.1{,}2 = x.0{,}32 + 90.0{,}32$$
$$x.(1{,}2 - 0{,}32) = 28{,}8$$
$$x.0{,}88 = 28{,}8$$
$$x = \frac{28{,}8}{0{,}88} \cong 32{,}7$$

Sustituyendo en (1) es h = 32,7.tg 50º $\cong$ 38,97m

$\therefore$ La torre tiene una altura aproximada de 39m

b) Aplicando el teorema del seno, se puede calcular $\overline{AC}$ y luego usando la definición de razón trigonométrica se calcula h.

- Calculamos los ángulos para aplicar el teorema.

$$\frac{sen32^{o}}{90} = \frac{sen18^{o}}{d} \quad \therefore \quad d = \frac{90.sen18^{o}}{sen32^{o}}$$

$$d \cong 52{,}6m$$

- En ABC calculamos h = 52,6.sen50º

$$h \cong 40{,}3m$$

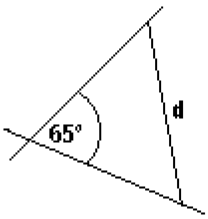
2) Dos carreteras rectas divergen formando un ángulo de 65º. Dos automóviles salen de la intersección a las 2:00 PM; uno viaja a 70 km/h y el otro a 90 km/h. ¿Qué distancia los separa a las 2:30 PM ?.

SOLUCIÓN:

- Dibujamos un diagrama.
- Suponemos que los automóviles viajan con M.U., luego se verifica d = v.t
- El tiempo es t = ½ h
- La distancia que recorrió cada automóvil está dada por:

  d1 = 70 km/h . ½ h = 35 km = $\overline{OA}$

  d2 = 90 km/h . ½ h = 45 km = $\overline{OB}$



- Se puede calcular $\overline{AB}$
- Aplicando el teorema del coseno se tiene.

$d^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos 65^{o}$
$d^2 = 45^2 + 35^2 - 2.45.35.\cos 65^{o}$
$d^2 \cong 2025 + 1225 - 1331{,}25$
$d^2 \cong 1918{,}75$
$d \cong 43{,}8$ km

3.10.0 ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Una ecuación trigonométrica es aquella que contiene funciones trigonométricas.

Así por ejemplo:

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \quad ; \quad 2\cos x - 1 = 0$$

son ecuaciones trigonométricas. La primera es una identidad, es decir, se verifica para todo valor de la variable x. La segunda solo se verifica para ciertos valores de x.

En general, si una ecuación trigonométrica tiene una solución entonces tiene una cantidad infinita de soluciones. ¿Por qué?

Para calcular todas las soluciones de la ecuación sólo se necesitan determinar las soluciones en el intervalo adecuado y después usar la propiedad de la periodicidad de las funciones trigonométricas.

Resolvemos la ecuación anterior:

$$2.\cos x - 1 = 0$$
$$2.\cos x = 1$$
$$\cos x = \tfrac{1}{2}$$

En el intervalo $[0, 2\pi)$ la función coseno es positiva si x pertenece al primero y al cuarto cuadrante, luego los valores que cumplen con la ecuación son:

$$x_1 = \frac{\pi}{3} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{5\pi}{3}$$

Pero como la función es periódica y su período es 2π a esos valores se obtiene otra solución. Por lo tanto, todas las soluciones de la ecuación tienen la forma:

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \quad , \kappa \in Z$$

MÁS EJEMPLOS

1) Calculá las soluciones de la ecuación 2.sen x .cos x + cos x = 0 si $0 \leq x < 2\pi$

SOLUCIÓN:

En este caso nos piden las soluciones en un intervalo dado.

2.sen x .cos x + cos x = 0
cos x . [2. sen x + 1] = 0 → factor común

Si el producto es nulo entonces se verifica:

cos x = 0 (1) o 2.sen x + 1 = 0 (2)

(1) cos x = 0 en $[0, 2\pi)$ si $x = \frac{\pi}{2}$ o $x = \frac{3\pi}{2}$

(2) 2.sen x + 1 = 0

2.sen x = -1
$\text{sen } x = -\frac{1}{2}$

En el intervalo $[0, 2\pi)$ la función seno es negativa si x está en el tercer o cuarto cuadrante, luego el valor que corresponde es $x = \frac{7\pi}{6}$ o $x = \frac{11\pi}{6}$

El conjunto solución es:

$$S = \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}$$

2) Calculá las soluciones de $\cos^2 x = ½$ si $0 \le x < 2\pi$

SOLUCIÓN: $\cos^2 x = ½$

- Aplicamos $\sqrt{\ }$

$$\sqrt{\cos^2 x} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$|\cos x| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Las soluciones correspondientes son:

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{4} \quad ; \quad x = 7\frac{\pi}{4}$$

y

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{4} \quad ; \quad x = 5\frac{\pi}{4}$$

El conjunto solución es; $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$

3) Calculá <u>todas</u> las soluciones de la ecuación $\text{sen}^2 x + \text{sen } x - 2 = 0$

SOLUCIÓN:

Aplicamos la fórmula para resolver una ecuación de segundo grado:

$$\text{sen } x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

De aquí obtenemos:

- sen x = 1 (1)
- sen x = -2 (2)

- La ecuación sen x = 1 se verifica si $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ con $k \in Z$
- La ecuación sen x = -2 <u>no</u> tiene solución, porque la función seno tiene imagen entre –1 y 1.

Luego el conjunto solución es:

$$s = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z\right\}$$

4) Calculá la solución de la ecuación 3cos x = 2 sen² x si $x \in [0,2\pi)$

SOLUCIÓN:

Si usamos la identidad pitagórica: sen² x = 1 – cos² x, obtenemos una ecuación equivalente donde solo interviene la función seno.

3cos x = 2sen²x	. Original
3cos x = 2.(1 – cos² x)	.Identidad
3cos x – 2 + 2cos² x = 0	.Transposición de términos
2cos² x + 3cos x – 2 = 0	.Ordenamos

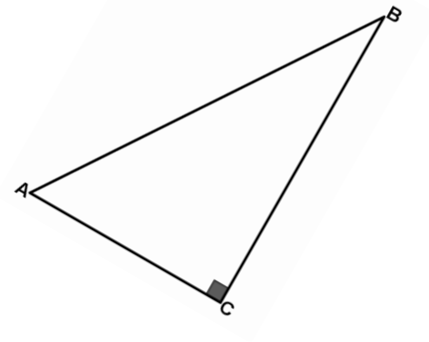
Aplicamos la fórmula para resolver una ecuación de segundo grado:

$$\cos x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4(2)(-2)}}{2.2} = \frac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} \tfrac{1}{2} \\ -2 \end{cases}$$

- La ecuación cos x = ½ se verifica si x = $\frac{\pi}{3}$ o x = 5.$\frac{\pi}{3}$
- La ecuación cos x = -2 no tiene solución porque la función coseno tiene imagen entre –1 y 1 luego el conjunto solución es:

$$S = \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\}$$

ACTIVIDADES



1) En cada caso, a partir del triángulo rectángulo de la figura y los datos dados, encontrá la longitud de los lados y la medida de los ángulos restantes:

a) $\hat{\alpha} = 30°$ y $|\overline{bc}| = 20\,\text{cm}$

b) $|\overline{ac}| = |\overline{bc}| = 5\,\text{cm}$

c) $\hat{\alpha} = 60°$ y $|\overline{ab}| = \sqrt{3}\,\text{cm}$

2) En un triángulo las medidas de sus ángulos interiores son $\hat{\alpha} = 45°$ y $\hat{\beta} = 105°$, y el lado que comparten dichos ángulos tiene una longitud de $\sqrt{2}$ cm. Determiná su perímetro.

3) En un triángulo rectángulo el coseno de uno de los ángulos agudos es $\frac{\sqrt{3}}{2}$ y la hipotenusa mide 4 cm. Determiná las medidas de los catetos y las medidas de los ángulos (en radianes).

4) En cada caso, encontrá la medida de x:

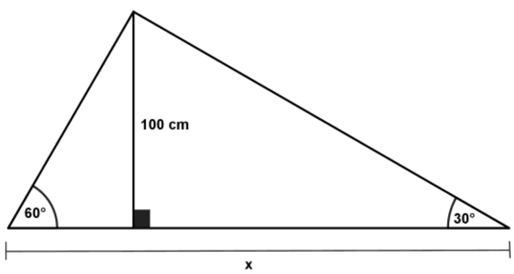


Figura 1

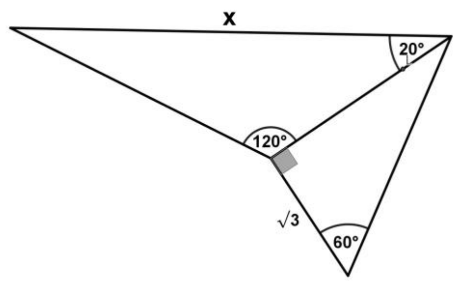
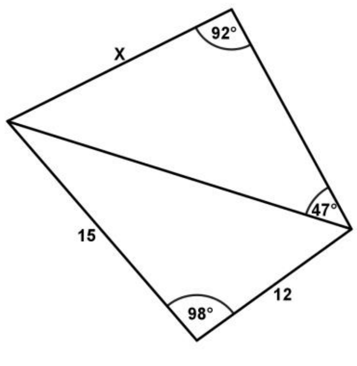


Figura 2

Figura 3



5) En cada caso, indicá la respuesta correcta, justificando tu respuesta:

a) Si un árbol de 2,38 metros proyecta una sombra de 1,6 metros, el ángulo de elevación del sol es aproximadamente:

i. 45° **ii.** 70° **iii.** 32° **iv.** 56°

b) La diagonal de un rectángulo mide 4 cm y forma con la base un ángulo de 60º. La superficie el rectángulo es aproximadamente:

i. 7,58 cm^2 **ii.** 8,24 cm^2 **iii.** 6,93 cm^2 **iv.** 9,12 cm^2

c) Desde una torre se arroja, con un ángulo de depresión de 27º, una soga de 15 metros de longitud y, al tensarla, su extremo se encuentra de la base de la torre aproximadamente a:

i. 13,36 m **ii.** 7,64 m **iii.** 29,44 m **iv.** 16,83 m

6) Un bote cruza un río de 380 m de ancho, pero la corriente lo desvía en su trayectoria unos 15°. ¿Cuántos metros recorre para cruzar el río?

7) ¿Cuál es el ángulo de elevación de un avión que recorre 5200 m en el aire y alcanza una altura de 3000 m?

8) Se quiere construir un tobogán acuático que consta de dos tramos inclinados y uno horizontal. Desde la pileta donde desemboca el primer tramo se observa con un ángulo de elevación de 25°, luego viene el tramo horizontal y, por último, un tramo inclinado con un ángulo de elevación de 35°. ¿Cuál es la longitud del tobogán si se sabe que ocupa en total 30,5 m de largo sobre la horizontal, tiene una altura máxima de 9 m y la parte recta se encuentra a 4,5 m de altura?

9) La distancia entre dos edificios A y B es de 120 metros. Si el edificio A mide 96 metros de altura y el ángulo de elevación del punto más alto del edificio A al punto más alto del edificio B es de 31º, calculá la altura del edificio B.

10) Desde un barco se miden las visuales a la base y el extremo de un faro de 30 metros de altura, situado sobre la base de un acantilado. Si los ángulos miden 18º y 35º, respectivamente. Calculá la distancia del barco a la costa y la altura del acantilado.

11) Una persona se encuentra a 110 m del lugar donde un globo aerostático comenzó a elevarse. Pasado un tiempo, el ángulo de elevación con el que observa el globo cambia de 20° a 35°. ¿Cuántos metros se elevó el globo durante ese período?

12) Desde un punto, ubicado sobre un camino recto inclinado 5° con respecto a la horizontal, se observa con un ángulo de elevación de 40° una torre de 30 metros de altura. Determiná la distancia entre el punto de observación y el punto más alto de la torre.

13) Para localizar una emisora clandestina E ubicada entre dos unidades receptoras R1 y R2, distantes entre si 8 km, las mismas orientan sus antenas en la dirección de recepción óptima. Se miden los ángulos R1=32º y R2=48º. ¿A qué distancia de R1 y R2se encuentra la emisora?

14) Dos automóviles transitan por una autopista que se bifurca en dos caminos que determinan un ángulo de 32°. En el mismo instante, cada automóvil toma un camino diferente a 75 km/h y a 90km/h, respectivamente. ¿A qué distancia se encuentran media hora después de separarse?

15) Un helicóptero viaja de una ciudad hacia otra, distantes entre sí 40 km. En un determinado momento, los ángulos que forman las visuales, desde el helicóptero hacia las ciudades, con la horizontal son de 14º y 26º, respectivamente. ¿A qué altura está el helicóptero? ¿Qué distancia hay en ese momento entre el helicóptero y cada una de las ciudades?

16) Dos barcos salen de un mismo puerto simultáneamente. Uno avanza a una velocidad de 50 km/h en dirección N 50º E y el otro a una velocidad de 45 km/h en dirección S 70º E. ¿Qué distancia los separa después de una hora?

17) Un ingeniero observa una maqueta de tres casas que deberá construir. Las casas A y B se encuentran separadas por un lago. Trazando líneas rectas desde A hasta C y desde B hasta C, observa que la distancias son 50 cm y 70 cm, respectivamente. Además, el ángulo que forman dichas líneas rectas es de 65°. Sabiendo que la escala para realizar la maqueta fue $1\,\text{cm} \equiv 2\,\text{km}$, ¿cuál es la longitud real del lago que separa las casas A y B?

18) Indicá en qué cuadrante se encuentra α si:

a) $\cos\alpha > 0$ y $\operatorname{sen}\alpha < 0$.

b) $\operatorname{tg}\alpha > 0$ y $\cos\alpha < 0$.

c) $\sec\alpha < 0$ y $\operatorname{sen}\alpha > 0$.

19) Sabiendo que $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ y $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, determiná el valor de $\operatorname{tg}\alpha$, $\sec\alpha$ y $\operatorname{cosec}\alpha$.

20) Sin encontrar α, sabiendo que $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$ y que $\alpha \in \text{IV cuad}$, determiná $\operatorname{sen}\alpha$ y $\operatorname{tg}\alpha$.

21) Si $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$ y $\alpha \in \text{III}$ cuadrante, calculá:

(Sugerencia: antes de realizar los cálculos, simplificá las expresiones)

a) $\sec\alpha + \operatorname{tg}\alpha - 3.\operatorname{cosec}\alpha =$

b) $\cos\alpha \cdot (\sec\alpha - \cos\alpha) =$

c) $\frac{\operatorname{sen}\alpha \cdot \sec\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} =$

d) $(\operatorname{cosec}\alpha - \operatorname{sen}\alpha) : \operatorname{cotg}\alpha =$

22) En cada caso, determiná el valor de α que cumpla las condiciones indicadas:

a) $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2}$ $\qquad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

b) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$ $\qquad \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

c) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad \pi < \alpha < 2\pi$.

d) $\operatorname{sen}\alpha = -1$ $\qquad 0 < \alpha < \pi$.

23) Calculá todas las soluciones de las ecuaciones:

a) $2.\operatorname{sen} x - \sqrt{3} = 0$

b) $2 \cdot \cos^2 x - 1 = 0$

c) $\operatorname{sen}^2 x = 2 \cdot \operatorname{sen} x + 3$

d) $\cos\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = 0$

e) $\cos x \cdot \operatorname{sen} x - 2 \cdot \operatorname{sen} x = 0$

f) $3 \cdot \cos x = \operatorname{sen}^2 x$

g) $\operatorname{cosec}^2 x - 4 = 0$

h) $\sec x + \operatorname{tg} x = 0$

i) $2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x = 0$

j) $2 \cdot \operatorname{cotg} x + \sqrt{3} \cdot \operatorname{cosec} x = 0$

k) $2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{x}{4}\right) + \sqrt{2} = 0$

l) $\left(\operatorname{tg} x + \sqrt{3}\right) \cdot (\cos x + 2) = 0$

ACTIVIDADES DE INTEGRACIÓN Y PROFUNDIZACIÓN

1) Dibujá la gráfica de las siguientes funciones y en cada caso indicá dominio, imagen y período.

a. $y = 3.\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ b. $y = -\cos(2x)$ c. $y = 3 + \cos(x + \pi)$

2) A partir de la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} x$ representá gráficamente las siguientes funciones. Para cada función indicá: dominio, imagen y período.

a. $g(x) = \frac{1}{2}.f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ b. $h(x) = 3 - f(x)$ c. $j(x) = 1 + |f(x)|$

3) En una fábrica se desea construir una cinta transportadora para llevar la mercadería desde el depósito, en el subsuelo, hasta el salón de ventas, que está en la planta baja. La distancia vertical entre los dos salones es de 2,60 m. Si el ángulo de inclinación de la cinta será de 24º, ¿qué longitud aproximada deberá tener la cinta?

4) Claudio observa un árbol desde la orilla opuesta de un río, mide el ángulo que forma su visual con el punto más alto del árbol y obtiene 43º; retrocede 10 m y mide un nuevo ángulo, obteniendo un resultado de 35º.

a. ¿Qué altura tiene el árbol?
b. ¿Cuál es el ancho del río?

5) Julio y Aníbal tienen sus casas en el campo a una distancia de 500 metros. Ambos divisan un helicóptero volando entre ellos. Julio lo ve con un ángulo de elevación de 80º y Aníbal está a una distancia de 600 metros del helicóptero.

a. ¿A qué altura vuela el helicóptero?
b. ¿A qué distancia del helicóptero se encuentra Julio?

6) Calculá el perímetro y la superficie de un triángulo isósceles en el que los ángulos iguales miden 40º y los lados iguales miden 5 cm.

7) Sin calcular el valor de θ, determiná sus razones trigonométricas sabiendo que $\cos\theta = \frac{4}{5}$ y $\operatorname{tg}\theta < 0$.

8) Calculá <u>todas</u> las soluciones de $4.\cos^2 x - 3 = 0$

9) Calculá las soluciones de $2.\operatorname{sen}^2 x + 1 = 3.\operatorname{sen} x$ si $x \in [0^o; 360^o)$

10) Calculá las soluciones de $\left(\operatorname{tg} x - \sqrt{3}\right).\left(3 - 2.\cos x\right) = 0$ si $x \in [0; 2\pi)$

AUTOEVALUACIÓN

1) Si un ángulo está comprendido entre $\frac{\pi}{2}$ y π, ¿qué es mayor, el seno o el coseno del ángulo?

2) ¿En cuánto deben diferir dos ángulos para que sus tangentes coincidan?

3) Si $\operatorname{tg} x = 2$, calculá $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$, sabiendo que x está en el tercer cuadrante.

4) En un triángulo isósceles el lado desigual mide 10 cm y los ángulos iguales miden 70º. Calculá su área y su perímetro.

5) Calculá el valor de x sabiendo que $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\operatorname{sen} x < 0$

6) Resolvé la siguiente ecuación para $0 \leq x < 2\pi$ siendo

$$\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen} x$$

7) Graficá las siguientes funciones. En cada caso, determiná dominio, imagen y período.

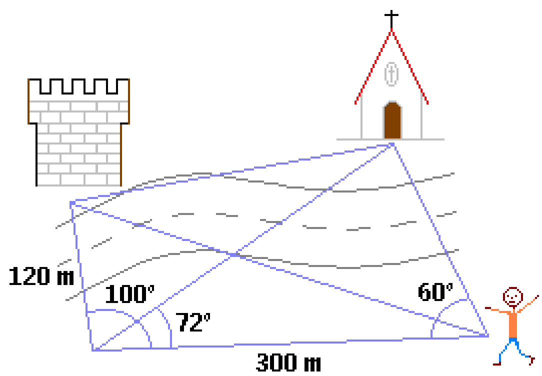
a. $f(x) = 3 - 2.\operatorname{sen} 2x$

b. $f(x) = \frac{1}{2}.\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

c. $f(x) = 4.\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

8) Desde lo alto de un hotel con vista al mar, un turista observa una lancha que navega directamente al hotel. Si el turista está a 32 metros sobre el nivel del mar y el ángulo de depresión de la lancha cambia de 30º a 45º durante la observación, ¿qué distancia recorre la lancha?

9) Observá el dibujo e indicá como medirías la distancia del castillo a la iglesia, si te encontraras al otro lado de una autopista de 120 m de ancho.



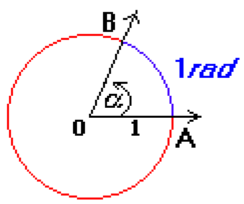
FUNCIONES PERIÓDICAS

Verifican f(x) = f(x + p) con p: período

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

- **f(x) = sen x** **D_f = R; I_f = [-1 , 1]; p = 2 π ; Impar: f(x) = -f(-x)**
- **f(x) = cos x** **D_f = R; I_f = [-1 , 1]; p = 2 π ; Par: f(x) = f (-x)**
- **f(x) = tg x D_f = R – { (2k+1) $\frac{\pi}{2}$ }; I_f = R; p = π ; Impar: f(x) = - f(-x)**

SISTEMAS DE MEDICIÓN DE ÁNGULOS

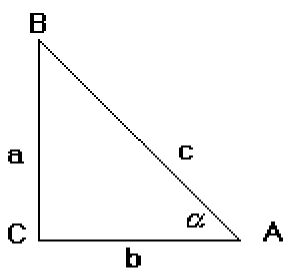


- **Sexagesimal** $$1° = \frac{1\,\text{ángulo recto}}{90°}$$
- **Radial** $$1\,rad = \frac{long.\,AB}{1}$$

Conversión de un sistema a otro

$$\alpha^{rad} = \frac{\pi}{180^{\circ}}\,\alpha^{\circ} \quad ; \quad \alpha^{\circ} = \frac{180^{\circ}}{\pi}\,\alpha^{rad}$$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

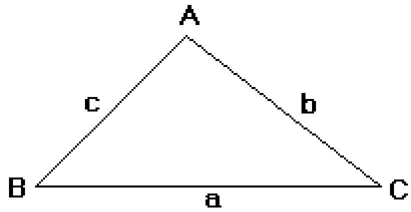


$$\boxed{\operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{c} \quad ; \quad \cos\alpha = \frac{b}{c} \quad ; \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}}$$

IDENTIDAD PITAGÓRICA

$$\boxed{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

TRIÁNGULOS NO RECTÁNGULOS



TEOREMA DEL COSENO

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos C$$

TEOREMA DEL SENO

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$$

Cada problema que resolví se convirtió en una regla que sirvió más tarde para resolver otros problemas.
Descartes

1) Indicá en cada caso si las expresiones dadas son iguales:

a. $\frac{1}{9+6}$ y $\frac{1}{9}+\frac{1}{6}$ b) $\frac{9+7}{7}$ y 9

c) $\frac{9+7}{7}$ y $\frac{9}{7}+1$ d) $(a+b)^2$ y a^2+b^2

e) $\sqrt{4.9}$ y $\sqrt{4}.\sqrt{9}$ f) $\sqrt{27}$ y $3\sqrt{3}$

g) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ y $\frac{\sqrt{3}}{3}$ h) $\sqrt{64+36}$ y $\sqrt{64}+\sqrt{36}$

2) En un milímetro cúbico de cierta vacuna hay 1200 bacterias.
¿Cuántas bacterias habrá en un litro de esa vacuna?. Expresá el resultado en notación científica.

3) La nave espacial Voyager, enviada para explorar el espacio, tardó 10 años en llegar a Neptuno. Si su velocidad era de 5.10^4 km / h, calculá la distancia de la Tierra a Neptuno

4) La distancia de la Tierra al Sol es de 150000000 km. Pensando que la Tierra describe en un año casi un círculo alrededor del Sol, calculá aproximadamente la velocidad de traslación de la Tierra.

5) Indicá en cada caso si los números dados son iguales:

a) $\left|\sqrt[3]{4}\right|$ y $\left|-\sqrt[3]{4}\right|$ b) $|a.b|$ y $|a|.|b|$

c) $|(-4).(-5)|$ y $|-4|.|-5|$ d) $|-3|$ y $-|3|$

e) $|-4.5|$ y $|-4|.|5|$ f) $|(-4).(-5)|$ y $|4|.|5|$

6) Desde un punto P, perteneciente a uno de los lados de un triángulo equilátero, se trazan perpendiculares a los otros dos lados.
Calculá el área de cada una de las partes en que queda dividido el triángulo, sabiendo que el punto P divide al lado en dos segmentos de 3 cm y 5 cm, respectivamente.

7) Asociá cada uno de los enunciados con la expresión algebraica que le corresponde:

ENUNCIADOS	EXPRESIONES
a) El cuadrado de la suma de dos números es igual a la suma de sus cuadrados más el doble de su producto.	**1**.- $n,\ n-1,\ n+1$
b) El producto de dos potencias de la misma base es igual a otra potencia que tiene la misma base que las anteriores y cuyo exponente es igual a la suma de los exponentes de las potencias que se multiplican.	**2**.- $\frac{x}{3}=\frac{y}{5}=\frac{z}{8}$
c) Un número entero, el anterior y el siguiente.	**3**.- $V=\pi\, r^2 h$
d) Dos números pares consecutivos.	**4**.- $n+(n+1)+(n+2)=33$
e) La suma de tres enteros consecutivos es 33.	**5**.- $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$
f) Las edades de dos hermanos difieren en 6 años y el año próximo el hermano mayor tendrá el doble de años que el menor.	**6**.- $e=v\cdot t$
g) Las cantidades que se llevan tres socios son proporcionales a 3, 5 y 8.	**7**.- $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$
h) El espacio recorrido por un móvil es igual a su velocidad por el tiempo que está en movimiento.	**8.-** $\begin{cases} x-y=6 \\ x+1=2(y+1) \end{cases}$
i) El volumen de un cilindro es igual al producto de π por el cuadrado del radio de su base y por su altura.	**9**.-$2n\ ,\ 2n+2$

De las nueve expresiones algebraicas anteriores, hay dos que son ciertas para cualesquiera valores que demos a las letras. ¿Cuáles son?

8) La suma de tres números naturales consecutivos es igual al cuádruple del menor. ¿Cuáles son dichos números?

9) Cortando un cuadrado de 20 cm de perímetro por una paralela a uno de los lados, se obtienen dos rectángulos. El perímetro de uno de ellos es de 12 cm. ¿Cuál es el perímetro del otro?

10) Un fabricante de lámparas vende únicamente a distribuidores mayoristas mediante su sala de exhibición. El gasto general semanal, incluyendo salarios, costos de planta y alquiler de la sala de exhibición, es de $6000. Si cada lámpara se vende en $168 y el material que se utiliza en su producción cuesta $44.
¿Cuántas lámparas deben producirse y venderse a la semana de modo que el fabricante obtenga utilidades?

11) Calculá el valor de la constante "m" para que la ecuación

$x^2 - 6x + m = 0$ tenga:

a) dos soluciones distintas
b) dos soluciones iguales
c) por soluciones los valores 4 y 2
d) dos soluciones que no sean números reales.

12) El producto de un número entero por su siguiente es 272, calculá dichos números.

13) En un triángulo retángulo el lado mayor es 3 cm más largo que el mediano, el cual, a su vez, es 3 cm más largo que el pequeño.
Calculá cuánto miden los lados.

14) Un predio rectangular tiene un lado 70 m más largo que el otro. Cada diagonal entre esquinas opuestas mide 130 m. ¿Cuáles son las dimensiones del predio?

15) Resolvé las siguientes ecuaciones:

a. $3x^4 - 75x^2 = 0$

b. $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{3}{4}$

c. $\sqrt{4x+5} = x+2$

d. $\sqrt{2x-3} - \sqrt{x-5} = 2$

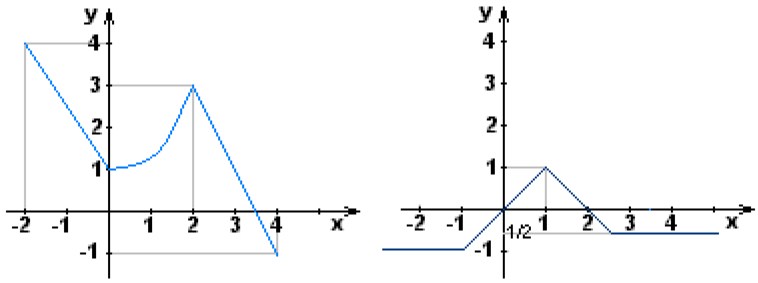
e. $\frac{x}{x-1} + \frac{2x}{x+1} = 3$

16) El área lateral de un cilindro es igual al área de la base.
¿Cuál es la relación entre el radio de la base y la altura del cilindro?

17) Los vértices de un rombo coinciden con los puntos medios de los lados de un rectángulo que tiene base 2m mayor que la altura. Sus perímetros se diferencian en 8 m.
¿Cuánto miden los lados del rectángulo y del rombo?

18) Las siguientes figuras representan una función y = f(x). A partir de la gráfica calculá:

a. dominio, imagen
b. f (0); f(-1); f(3); f(2); f(6)
c. la fórmula que representa la función
d. | f(x) |
e.. f (x - 1)
f. f (x) + 4



19) Sea f: R → R definida por

$$f(x)=\begin{cases} 1 & si \quad x\in Q \\ -1 & si \quad x\notin Q \end{cases}$$

Calculá: $f(0)$; $f\left(\sqrt{3}\right)$; $f\left(0{,}33..\right)$; $f\left(\ -7\right)$; $f\left(\sqrt{9}\right)$; $f(\pi)$

20) Determiná el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\sqrt{4-(4x+5)^2}$ b) $f(x)=\dfrac{x^2-x-6}{\sqrt{1-x}}$

c) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-4}{x^2+4}}$

21) Un automóvil que consume 10 litros de nafta cada 100 km, parte con 45 litros en el tanque. Una camioneta que consume 12 litros de gasoil cada 60 km, parte con 60 litros.

a) En cada caso, escribí la ecuación de la cantidad de combustible que queda en el tanque en función de los kilómetros recorridos.
b) Representá gráficamente.

¿Cuántos kilómetros deberán recorren para tener la misma cantidad de combustible en el tanque?

22) Dados los siguientes pares de funciones lineales f y g, determiná gráfica y analíticamente el conjunto $A=\{x\in R: f(x)\geq g(x)\}$:

a. $f(x)=3x+2,\ g(x)=2x-1$
b. $f(x)=-2x+1,\ g(x)=4x+1$
c. $f(x)=3,\ g(x)=-5x-2$

23) Para construir seis corrales para animales se cercó un terreno rectangular y luego se lo dividió mediante dos cercas paralelas a la base del terreno y una cerca paralela al otro lado. En total se utilizaron 1000 metros de cerca. Si x es la longitud de la base del terreno.

a. Escribí el área del terreno en función de x.
b. Representá gráficamente la función hallada en a).
c. Indicá el valor de x que hace máxima el área.
d. Indicá el dominio de la función hallada en a)

24) Una empresa promociona un producto de limpieza. El número de hogares que usan el producto en función del tiempo (en meses) está dada por : $C(x) = -x^2 + 12x$

Representá gráficamente y respondé:

a. ¿Durante cuánto tiempo el consumo fue en aumento?
b. ¿Cuál es el dominio y la imagen de la función?
c. ¿Cuántos meses pasaran para que el producto sea utilizado al máximo? ¿En cuántos hogares será utilizado?
d. Al cabo de 4 meses, ¿cuántos hogares estarán utilizando el producto?
e. ¿Existe algún momento donde el producto no sea utilizado en ningún hogar?
f. ¿Al cabo de cuántos meses el producto será utilizado en 5 hogares?

25) Cuando se produce una cantidad x (en miles de toneladas) de una cierta mercadería dos productores reciben un beneficio mensual (en miles de pesos) de:

$$p_1(x) = -x^2 + 8x - 3 \qquad p_2(x) = 2x - 10$$

a. Graficá ambas funciones en un mismo sistema de coordenadas.
b. ¿Cuántas toneladas deben producir ambos productores para obtener la misma ganancia?

26) Se sabe que una parábola corta el eje de abscisas en dos puntos P y Q, que distan 6 unidades entre sí y que toma su valor máximo y = 9 en x = 5.

a. Hallá el vértice de la parábola y las abscisas de P y Q.
b. Encontrá la ecuación de la parábola

27) Calculá el área de un trapecio rectangular, sabiendo que sus bases tienen 30 cm y 40 cm y que el lado oblícuo forma con la base mayor un ángulo de 60º.

28) El consumo de energía eléctrica de una familia, en KW-h está dado por la función

$$E(t) = 600 + 450\cos\left(\frac{2\pi}{12}(t-1)\right)$$

donde "t" indica los meses del año (enero =1)

a. ¿Cuál es el consumo en enero, en julio, en octubre?
b. ¿Qué período tiene E(t)?
c. Representá dos ciclos de E(t)

29) Mostrá gráficamente que $1-\cos x \le \operatorname{sen} x \le x$ en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

30) Analizá cada afirmación e indicá si es verdadera o falsa. Justificá tu respuesta.

a. La función $f(x) = \operatorname{sen} x$ es creciente en $\left[-3\pi, \frac{5}{2}\pi\right]$
b. La función $f(x) = \cos x$ tiene exactamente un cero en $[2\pi, 3\pi]$
c. Para $x = \frac{\pi}{4}$ se cumple que $\operatorname{sen} x = \cos x$
d. No existe ningún valor de x para el cual $\operatorname{sen} x = \sqrt{3}$
e. No existe ningún valor de x para el cual $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$

31) Dos lados de un paralelogramo miden 6 y 8 cm y forman un ángulo de 32º. Calculá el área y las diagonales del paralelogramo.

32) En el cuadrado ABCD se une el vértice A con M, punto medio del lado BC, y con N, punto medio del lado CD.
Calculá los lados y los ángulos del triángulo AMN, sabiendo que el lado del cuadrado mide 4 cm.

33) Matías, parte de su casa y camina 8 km en dirección S 50º E hasta llegar a su primera parada. Descansa y parte nuevamente caminando, esta vez, en dirección S 30º O hasta llegar a la segunda parada, donde descansa y regresa a su casa. Si la distancia en línea recta, desde su casa a la última parada, es de 12 km. ¿Qué distancia recorrió en el segundo trayecto?.

ALGUNOS EJERCICIOS DE EXÁMENES DE AÑOS ANTERIORES

1) Indicá si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificá sus respuestas.

a. $\sqrt[3]{27}+4$ es un número irracional.

b. Si $a^2=b^2$ entonces $a=b$

c. Si $a>b$ entonces $3-2a>3-2b$

d. $\dfrac{a^2-b^2}{a+b}=a-b$

e. El conjunto solución de la inecuación $\dfrac{4}{x}\le x$ es $S=[-2,0)\cup(2,+\infty)$

f. $\sqrt{a^2+b^2}=a+b$

g. El conjunto solución de la inecuación $\dfrac{2}{|x+5|}>4$ es $S=\left(-\dfrac{11}{2},-\dfrac{9}{2}\right)$

h. El dominio de la función: $g(x)=\sqrt{(x+4)(3-x)}$ es $D_g=[-4;3]$

2) Representá gráficamente las siguientes funciones. En cada caso, indicá <u>claramente</u> dominio, imagen e intersección con los ejes de coordenadas:

a. $f(x)=\begin{cases}|x+3| \text{ si } x\le -2\\ 1 \text{ si } -2<x\le 3\\ -\dfrac{2}{3}x \text{ si } x>3\end{cases}$

b. $f(x)=-2.\mathrm{sen}\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$

3) Sean A(1,2) ; B(3,6) ; C(7,6) y D(5,2) los vértices de un paralelogramo, calculá

a. Las ecuaciones de las rectas que contienen a sus lados.
b. El área y perímetro del paralelogramo.

4) Un agricultor desea proteger un campo rectangular con una cerca y dividirlo en dos parcelas rectangulares mediante una cerca paralela a una de los costados del campo. Si tiene disponible 3000 metros de cerca, calculá las dimensiones del campo de tal manera que el área protegida sea máxima.

5) Un observador y un castillo se encuentran en orillas opuestas de un río. El observador mide el ángulo que forman su visual con el punto más alto del castillo y obtiene 35°. Retrocede 15 m mide de nuevo el ángulo y obtiene 20°. ¿Qué ancho tiene el río?

6) A partir de la gráfica de f(x) = sen x representá las funciones:

a. $g(x) = -2.f(x)$ b. $h(x) = 3 - f(x)$

c. $t(x) = \frac{1}{2}.f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ d. $p(x) = f(2x)$

Para cada función indique: dominio, imagen, período, valores máximos y/o mínimos.

7) A partir de la gráfica de f(x) = | 2x – 1| graficá las siguientes funciones

a. $g(x) = -f(x) + 4$ b. $h(x) = f(x+3)$ c. $p(x) = f(2x) + 5$

En todos los casos indique dominio e imagen.

8) A partir de la gráfica de $f(x) = 2x^2 - 4$ dibujá la gráfica de

a. $g(x) = f(x-1)$ b. $h(x) = 6 - f(x+4)$ c. $p(x) = |f(x) + 1|$

En cada caso determine: dominio, imagen, y si existen , las intersecciones con los ejes, máximos / mínimos.

9) En un triángulo rectángulo la hipotenusa es el doble de un cateto. Si el perímetro mide $\sqrt{3}$ cm. Determiná:

a. El área del rectángulo como función de un cateto.
b. El dominio de la función hallada en a)

10) Un helicóptero viaja de una ciudad a otra, distantes entre sí 40 km. En un determinado momento los ángulos que forman las visuales, desde el helicóptero, hacia las ciudades con la horizontal son de 14° y 26° respectivamente.

En ese instante:

a. ¿A qué altura está el helicóptero?
b. ¿Qué distancia hay en ese momento entre el helicóptero y cada una de las ciudades?

11) Dada la recta de ecuación : $2ky + 3x + 1 = 0$ con k $\in$ R, en cada caso, calculá el valor de k" si:

a. Tiene ordenada al origen igual a - 2
b. Pasa por el punto A (-3 , 2)
c. Es paralela a la recta : 5 x + 2 y = 3

12) Un proyectil disparado hacia arriba con una velocidad de 100 m/seg. se mueve de acuerdo con la ley : $y = 100t - 5t^2$, donde *y* es la altura en metros desde el punto de partida y *t* el tiempo transcurrido, en segundos, después del lanzamiento.

a. Representá la altura del proyectil como función del tiempo
b. Calculá la altura máxima que alcanza y el instante en que se produce
c. En t = 8 seg. ¿ está subiendo o bajando?. Justificá su respuesta.
d. ¿En algún instante el proyectil regresa al punto de partida? Justificá su respuesta.

13) Dibujá un rectángulo que tenga su base sobre el eje x, sus otros dos vértices por encima del mismo y pertenecientes a la parábola $y = 8 - x^2$

a. Escribí el perímetro del rectángulo en función de "x".
b. Hallá las dimensiones del rectángulo de perímetro máximo.

14) Un rectángulo está inscripto en un triángulo rectángulo de catetos 3 cm y 4 cm, si dos lados del rectángulo están sobre los catetos

a. Expresá el área del rectángulo en función de su base
b. Calculá las dimensiones del rectángulo de área máxima

15) En el rectángulo ABCD, las rectas que contienen a los lados AB y AD son: $y = \frac{2}{3}x$ e $y = -\frac{3}{2}x + \frac{13}{2}$, respectivamente.

a. Representá gráficamente.
b. Encontrá las coordenadas de A.
c. Si $C = \left(\frac{14}{3};6\right)$, encontrá las rectas que contienen a los lados BC y CD.

Universidad Tecnológica Nacional – Facultad Regional Bahía Blanca

Examen de Ingreso – MATEMÁTICA Y FÍSICA

Apellido y nombre:...D.N.I.…...……….……….

Completa **todos** los datos solicitados en el encabezado.
Coloca en **todas** las hojas el nombre y apellido.
Desarrolla el examen en forma **clara** y **prolija**. Lo que no se entienda no se podrá evaluar.
Debes entregar el desarrollo **completo** de los ejercicios. Las respuestas que no cuenten con la debida justificación, no serán consideradas.
Al finalizar el examen, indica la **cantidad total** de hojas que entregas y **firma**.

Ejercicio1: Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica cada una de tus respuestas. <u>En caso de ser falsa, indica la respuesta correcta</u>:

a) La solución de la ecuación $\left(\sqrt{2}+1\right)\cdot x-1=\dfrac{\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{2}$ es un número racional positivo.

b) El dominio de la función $f(x)=\sqrt{\dfrac{2-x}{x^2-1}}$ es $D_f=\left(-\infty,2\right]$.

c) La expresión de la función cuadrática cuya imagen es $\left[-1,+\infty\right)$, crece en $\left(-4,+\infty\right)$ y sus raíces son -5 y -3 es: $f(x)=x^2+8x+15$.

d) La ecuación $2\cdot\left(\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta\right)=1$ sólo tiene solución en el primer cuadrante.

Ejercicio 2: Un auto viaja detrás de un colectivo. En determinado momento se encuentran separados por una distancia de 2000 m, moviéndose en la misma dirección y sentido a velocidades constantes de 90 km/h y 15 m/s, respectivamente.

a) Elije y dibuja un sistema de referencia que creas conveniente y escribe las ecuaciones de posición en función del tiempo de ambos vehículos.

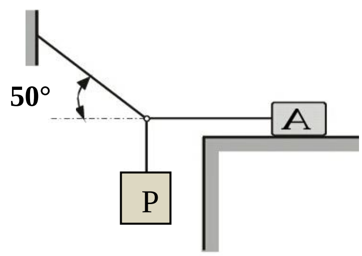
b) Calcula el tiempo y la posición en que el auto alcanza al colectivo.

c) Determina en qué instante/s estuvieron separados por una distancia de 1000 metros.

d) Realiza en un mismo sistema de ejes cartesianos los gráficos de posición en función del tiempo de ambos vehículos, indicando el punto de encuentro.

Ejercicio 3: ¿Cuál es la altura de una torre si el ángulo de elevación disminuye de 46º a 33º cuando un observador que está situado a una cierta distancia del pie de la torre, se aleja 100 m en la misma dirección?

Ejercicio 4: Sabiendo que el sistema de la figura se encuentra en equilibrio y que Peso A = 60 N y Peso P = 90 N:



a) Dibuja el sistema de fuerzas que actúa sobre el punto de unión de las sogas.

b) Determina la tensión en la soga que forma un ángulo de 50° con la horizontal.

c) Calcula la fuerza de rozamiento ejercida sobre el cuerpo A por la superficie horizontal.

Universidad Tecnológica Nacional – Facultad Regional Bahía Blanca

Examen de Ingreso – MATEMÁTICA Y FÍSICA

Apellido y nombre:...D.N.I.…...………..………

Completa **todos** los datos solicitados en el encabezado.

Coloca en **todas** las hojas el nombre y apellido.

Desarrolla el examen en forma **clara** y **prolija**. Lo que no se entienda no se podrá evaluar.

Debes entregar el desarrollo **completo** de los ejercicios. Las respuestas que no cuenten con la debida justificación, no serán consideradas.

Al finalizar el examen, indica la **cantidad total** de hojas que entregas y **firma**.

Ejercicio1:

a) Resuelve la ecuación: $\left(\sqrt{5}-1\right)\cdot x+\left(\sqrt{5}-1\right)^2=\dfrac{2\sqrt{5}-10}{\sqrt{5}}$

En caso de tener solución única, indica a qué conjunto numérico pertenece dicha solución.

b) Resuelve la inecuación: $\dfrac{3}{x+2}\geq 1$. Indica el conjunto solución en forma de intervalo.

Ejercicio 2: Dos autos se mueven en sentido contrario uno hacia el otro, sobre una ruta recta. El que está a la izquierda, que llamaremos “A”, viaja con una rapidez de 35 m/s y el que se encuentra a la derecha, “B”, lo hace con una rapidez de 20 m/s. Inicialmente están separados 8 km.

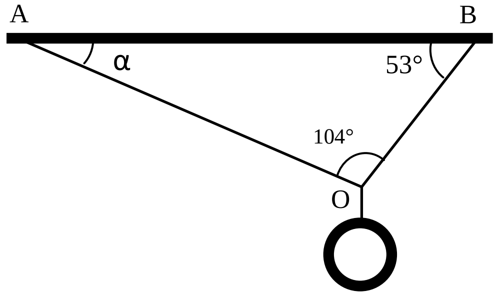
a) Grafica la situación y elige un sistema de referencia. *(ATENCIÓN: si no indicas qué sistema de referencia eliges, no se podrán corregir adecuadamente los demás ítems)*
b) Arma la función horaria (función de la posición en función del tiempo) de cada auto.
c) ¿Qué tipo de funciones matemáticas son?
d) Calcula en qué instante de tiempo se cruzan los autos y en qué posición lo hacen.
e) Grafica la posición en función del tiempo de ambos autos sobre los mismos ejes coordenados, e indica sobre el gráfico los resultados del inciso anterior.

Ejercicio 3: Un fabricante de accesorios de iluminación tiene costos diarios de producción expresados por la función $C(x)=800+bx+0{,}25x^2$, donde C es el costo total (en pesos) y x es el número de unidades producidas.

a) Encuentra el valor de $b\in R$ sabiendo que producir 12 unidades tiene un costo de \$716.
b) Representa gráficamente la función C.
c) ¿Cuántos accesorios deberá producir por día para tener costo mínimo? ¿Cuál es el costo mínimo? Justificar.
d) Determinar la cantidad mínima de accesorios que se fabricaron un día que el costo total fue de \$749.

Ejercicio 4: Encuentra todas las soluciones de la ecuación $\cos^2\theta-3\cdot \mathrm{sen}\theta+3\cdot \mathrm{sen}^2\theta=0$ en el intervalo $[0,2\pi)$.

Ejercicio 5: Una esfera que pesa 350 N está sostenida por cuerdas como lo muestra la figura. La distancia entre los puntos de sujeción de las cuerdas, AB, es de 3 m.



a) Calcula la longitud de los segmentos de cuerda AO y BO, y el valor del ángulo α.
b) Dibuja el diagrama de fuerzas aplicadas sobre el punto O, y adopta un sistema de referencia x-y con origen en ese punto.
c) Escribe las ecuaciones de equilibrio.
d) Determina las fuerzas que ejercen los segmentos de cuerda AO y BO.

Universidad Tecnológica Nacional – Facultad Regional Bahía Blanca

Examen de Ingreso – MATEMÁTICA Y FÍSICA

Apellido y nombre: ....D.N.I.…..………..………

> Completa **todos** los datos solicitados en el encabezado.
> Coloca en **todas** las hojas el nombre y apellido.
> Desarrolla el examen en forma **clara** y **prolija**. Lo que no se entienda no se podrá evaluar.
> Debes entregar el desarrollo **completo** de los ejercicios. Las respuestas que no cuenten con la debida justificación, no serán consideradas.
> Al finalizar el examen, indica la **cantidad total** de hojas que entregas y **firma**.

Ejercicio 1: En cada caso, marca **la** respuesta correcta, **justificando tu elección**:

a) Un auto acelera de 0 a 100 km/h en 7 segundos. Su aceleración en el SI (Sistema Internacional de Unidades) es:

☐ $3{,}97\ m/s^2$ ☐ $14{,}29\ m/s^2$ ☐ $14{,}29\ km/h^2$ ☐ $14{,}29$ km/(h.s)

b) El intervalo solución de la inecuación $\frac{2}{x} \geq 3$ es:

☐ $S = \left[0, \frac{2}{3}\right]$ ☐ $S = \left(0, \frac{2}{3}\right]$ ☐ $S = (-\infty, 0) \cup \left[\frac{2}{3}, +\infty\right)$ ☐ Ninguna de las respuestas anteriores.

c) Dada la recta de ecuación $y = \frac{1}{\left(1+\sqrt{2}\right)^2} . x$, la pendiente de una recta paralela a la misma es:

☐ $\frac{3-2\sqrt{2}}{5}$ ☐ $3-2\sqrt{2}$ ☐ $\frac{1}{3}$ ☐ Ninguna de las respuestas anteriores.

d) La ecuación $2 \cdot \left(\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta\right) = 1$ en el intervalo $[0, 2\pi)$ tiene:

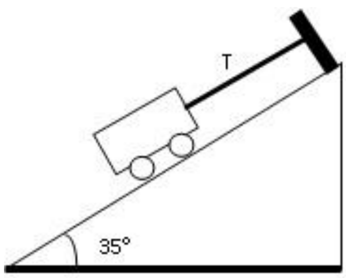
☐ Una solución ☐ Cuatro soluciones ☐ Tres soluciones ☐ Dos soluciones

Ejercicio 2: Dos individuos A y B separados entre sí por 4 km, observan un avión que pasa por encima de ellos. En un instante en que el avión vuela entre A y B, la distancia de A hasta el avión es de 3,18 km. Si en dicho instante B observa el avión con un ángulo de elevación de 46º, determinar a qué altura vuela el avión y el ángulo de observación del observador A al avión.

Ejercicio 3: El carrito de la figura, que pesa 250 N, se encuentra en equilibrio sobre el plano inclinado liso, como lo indica la figura.

a) Dibujar el diagrama de cuerpo aislado y escribir las ecuaciones de equilibrio.

b) Determinar el valor de la tensión en la cuerda y de la reacción normal del plano.



Ejercicio 4: Se lanza una piedra hacia arriba desde el suelo, de modo que sale del dispositivo lanzador con una velocidad de 25 m/s. Se supone que no hay resistencia con el aire, y se considera el valor de $g = 10\ m/s^2$

a) Obtener las ecuaciones cinemáticas que determinan la posición y la velocidad en función del tiempo de la piedra, tomando como origen del sistema de referencia el suelo, y sentido positivo hacia arriba.

b) Calcular a qué altura se encuentra cuando su velocidad es de 15 m/s.

c) Calcular el instante de tiempo en que la piedra alcanza la altura máxima, y la altura máxima alcanzada.

d) Confeccionar los gráficos x(t), v(t) y a(t)