POLINOMIOS

Definición: Las expresiones algebraicas del tipo $a.x^n$, con $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se denominan **monomios**. En dicha expresión, ***a*** recibe el nombre de coeficiente y ***n*** indica su grado.

Ejemplo: $4x^3$ es un monomio de grado 3. Su coeficiente es 4.

Definición: Un Polinomio con coeficientes reales es una expresión algebraica que se define de la siguiente manera:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 x^0$$

Donde los coeficientes a_0, a_1, … , a_n, son números reales, x se denomina indeterminada, y n es un número natural o cero.

Observaciones:

- La palabra polinomio se compone de **poli** = muchos y **nomios** = términos.
- Cada término de un polinomio se denomina **monomio**.

Elementos de los Polinomios

Si $a_n \neq 0$, se distinguen los siguientes elementos de un polinomio:

- a_n es el coeficiente principal,
- a_0 es el término independiente,
- n es el grado del polinomio.

Ejemplos:

(a) El polinomio $S(x) = 2x^4 - 5x^3 - 3x^5 + 7$ tiene como coeficiente principal a -3 y su término independiente es 7;

(b) El polinomio $T(x) = -x^6 - 8x + x^4$ tiene como coeficiente principal a -1 y su término independiente es 0;

(c) El polinomio $Q(x) = -3 - 8x^9 + 5x - 4x^3$ tiene como coeficiente principal a -8 y su término independiente es -3.

Definición: Los polinomios cuyo coeficiente principal es 1, se los denomina **mónicos**.

Ejemplo: $R(x)=x^3+3x^2-\sqrt{2}$ es un polinomio mónico.

Definición: Se denomina **grado de un polinomio** al mayor exponente que tiene la variable “x” de los términos con coeficientes no nulos.

*Notación: El grado de un polinomio P, se denota como **gr (P)**.*

Ejemplos:

(a) El polinomio $S(x)=6x+x^2-7x^5$ tiene grado **5**, porque es el mayor exponente que aparece; es decir, $\boldsymbol{gr(S)=5}$.

(b) El grado del polinomio $Q(x)=10-x^3+x$ es **3**, y se expresa como ***gr (Q) = 3***.

(c) El polinomio $T(x)=7$ tiene grado **0** porque $7=7x^0$; ***gr (T) = 0***.

Observaciones:

- Un **polinomio de grado cero** es de la forma $\boldsymbol{P(x)=k}$, $\mathbf{k}\in\mathbb{R}-\{0\}$ y se lo denomina **polinomio constante.** Por ejemplo $T(x)=7$ es un polinomio constante.
- $P(x)=0$ es un polinomio constante especial, ya que siempre vale cero. Recibe el nombre de **polinomio nulo** y decimos que carece de grado.

Clasificación

Según la cantidad de términos, un polinomio se denomina:

- **Monomio**, si tiene *un solo término*.

Ejemplos: $P(x)=3x^2$, $Q(x)=\sqrt{5}$, $T(x)=\frac{1}{2}x^5$

- **Binomio**, si tiene *dos términos.*

Ejemplos: $P(x)=3x^2-7x$, $Q(x)=-x+4$

- **Trinomio**, si tiene *tres términos.*

Ejemplo: $P(x)=x+3x^2-9x^{10}$

- **Cuatrinomio**, si tiene *cuatro términos.*

Ejemplo: $P(x)=8x^6-2x^5-x+3$

Conceptos importantes

- Un polinomio de grado *n* está **completo** cuando entre sus términos aparecen todos los exponentes de *n* hasta 0. Si alguno de los términos falta, el polinomio es **incompleto.**

Ejemplos:

(a) El polinomio $R(x)=2x^4-x^3+x^2-8x+7$ es un polinomio completo.

(b) El polinomio $Q(x)=x^4-3x^2+9$ está incompleto porque faltan los términos correspondientes a x^3 (término cúbico) y a x (término lineal).

Para **completar un polinomio**, se agregan los términos con los exponentes faltantes con coeficientes iguales a cero, como se muestra a continuación:

Ejemplos:

(a) Si se tiene $Q(x)=x^4-3x^2+9 \Rightarrow Q(x)=x^4+0x^3-3x^2+0x+9$ es un polinomio completo.

(b) Considerando $M(x)=2x^2-8 \Rightarrow M(x)=2x^2+0x-8$ es un polinomio completo.

- Un polinomio está **ordenado** si los grados de sus monomios están ordenados en forma creciente o decreciente.

Ejemplos:

$$\left.\begin{array}{l} (a)\ F(x)=2x^4+x^3-5x^2+5 \\ (b)\ G(x)=7+x+3x^2-x^3 \\ (c)\ H(x)=x^5+2x^2-7 \end{array}\right\}\ \text{son polinomios ordenados.}$$

(d) $T(x)=-x^6-8x+x^4$ es un polinomio no ordenado.

- Dos polinomios P(x) y Q(x) son **iguales** si son del mismo grado y los coeficientes de los términos semejantes (de igual grado) son iguales. Es decir, si $P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x^1+a_0x^0$ y $Q(x)=b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1}+...+b_1x^1+b_0x^0$, son dos polinomios de grado n, entonces P(x) = Q(x) sí y solo si, $a_n=b_n$; $a_{n-1}=b_{n-1}$; ... ; $a_1=b_1$; $a_0=b_0$.

- El **polinomio opuesto** al polinomio P(x) es un polinomio que tiene el mismo grado que P(x) y sus coeficientes son los opuestos de los coeficientes de P(x); se nota como -**P(x)**.

<u>Ejemplo</u>: El polinomio opuesto de $P(x)=-7x^2-2x+1$ es $-P(x)=7x^2+2x-1$.

<u>Definición</u>: Dado un polinomio $P(x)$ y $a\in\mathbb{R}$, se llama **valor numérico de** $P(x)$ **o especialización de** $P(x)$ para $x=a$ y notamos $P(a)$, al valor que toma el polinomio al reemplazar la indeterminada **x** por ***a*** y efectuando las operaciones indicadas.

<u>Ejemplos</u>: Calcular el valor numérico de los siguientes polinomios en los valores indicados.

(a) $P(x)=3x^2+x+5$ en $x=1$, $\quad P(1)=3.(1)^2+1+5\Rightarrow P(1)=9$

(b) $Q(x)=-x^7-2x^2+3$ en $x=1$, $\quad Q(-1)=-(-1)^7-2(-1)^2+3=1-2+3=2\Rightarrow Q(-1)=2$

OPERACIONES ENTRE POLINOMIOS

Suma y resta

Para hallar la suma de dos o más polinomios **se suman (o restan) los términos semejantes**, es decir, aquellos términos en los que la variable tiene el mismo exponente. Si los polinomios están desordenados, se los puede ordenar para la realizar la operación ya que esto facilita el reconocimiento de los términos semejantes.

<u>Ejemplo</u>: Realizar $M(x)+B(x)$ siendo $M(x)=-\frac{1}{2}x^5+2x^2-5x+3$ y $B(x)=-4x^5+7x^4-x+3$

$$\begin{aligned} M(x)+B(x) &= -\frac{1}{2}x^5+2x^2-5x+3+\left(-4x^5+7x^4-x+3\right) \\ &= -\frac{1}{2}x^5-4x^5+7x^4+2x^2-5x-x+3+3 \\ &= \left(-\frac{1}{2}-4\right)x^5+7x^4+2x^2+(-5-1)x+(3+3) \\ &= \boxed{-\frac{9}{2}x^5+7x^4+2x^2-6x+6} \end{aligned}$$

Otra manera de realizar la suma podría ser la siguiente:

Ejemplo: Realizar *P(x) + Q(x)*, siendo $P(x)=3x^5+0x^4-4x^3-2x$ y $Q(x)=2x^5-x^4-2x^3+0x$

$$\begin{array}{l} P(x)=3x^5+0x^4-4x^3-2x \\ + \\ Q(x)=2x^5-x^4-2x^3+0x \\ \hline S(x)=5x^5-x^4-6x^3-2x \end{array}$$

El polinomio *S(x)*, suma entre *P(x)* y *Q(x)* es $S(x)=5x^5-x^4-6x^3-2x$

Observación: El grado del polinomio suma es menor o igual que el grado de los polinomios sumados o carece de grado.

*Para **restar** dos polinomios se busca el polinomio opuesto del segundo y se suma lo obtenido al primero.*

Ejemplo: Hallar $P(x)-S(x)$ siendo $P(x)=x^5+2x^4-3x^3-2$ y $S(x)=3x^4-5x^2-3$

$$\begin{aligned} P(x)-S(x) &= \left(x^5+2x^4-3x^3-2\right)-\left(3x^4-5x^2-3\right) \\ &= x^5+2x^4-3x^3-2-3x^4+5x^2+3 \\ &= x^5+(2x^4-3x^4)-3x^3+5x^2+(-2+3) \\ &= x^5+(2-3)x^4-3x^3+5x^2+(-2+3) \\ &= \boxed{x^5-x^4-3x^3+5x^2+1} \end{aligned}$$

Multiplicación

Para multiplicar polinomios se aplica la propiedad distributiva, es decir, se multiplica cada término de un polinomio por los términos del otro y luego se agrupan (sumando o restando) los términos semejantes.

Observación: El grado del producto de dos polinomios no nulos es la suma de los grados de los polinomios factores, es decir $gr\left[P(x)\cdot Q(x)\right]=gr\ P(x)+gr\ Q(x)$.

Ejemplo: Multiplicar los polinomios $P(x)=3x^3-2x$ y $Q(x)=7x^2-5$

$$\begin{aligned} P(x).Q(x) &= \left(3x^3-2x\right).\left(7x^2-5\right) \\ &= 3x^3.7x^2+3x^3.(-5)-2x.7x^2-2x.(-5) \\ &= 21x^5-15x^3-14x^3+10x \\ &= \boxed{21x^5-29x^3+10x} \end{aligned}$$

Algunos productos especiales

- Binomio al cuadrado $(A+B)^2 = A^2 + 2.A.B + B^2$
- Binomio al cubo $(A+B)^3 = A^3 + 3.A^2.B + 3.A.B^2 + B^3$
- Producto de binomios conjugados $(A+B).(A-B) = A^2 - B^2$

División

La división entre dos polinomios *P(x)* y *Q(x)* es posible realizarla siempre y cuando *Q(x)* no sea el polinomio nulo y el grado de *P(x)* sea mayor o igual que el grado de *Q(x)*.

Para dividir polinomios se usa un procedimiento similar al de la división entera entre números enteros. Para lo cual el polinomio dividendo *P(x)* debe estar completo y ordenado en forma decreciente y el polinomio divisor *Q(x)*, ordenado en forma decreciente. Obtendremos un polinomio cociente *C(x)* y un polinomio resto *R(x)*.

.

$$\begin{array}{rl|l} \textit{dividendo} \leftarrow & P(x) & \underline{\mathrm{Q}(x)} \rightarrow \textit{divisor} \\ \textit{resto} \leftarrow & R(x) & C(x) \rightarrow \textit{cociente} \end{array}$$

Observaciones:

- Siempre se cumple que $P(x) = Q(x).C(x) + R(x)$
- El polinomio resto, *R(x)*, tiene menor grado que el polinomio divisor o es el polinomio nulo. (Esto indica cuándo finalizar la operación).
- El grado del polinomio cociente *C(x)* es la diferencia entre los grados de *P(x)* y *Q(x)*, es decir, $gr\ C(x) = gr\ P(x) - gr\ Q(x)$.

Ejemplo: Dividir el polinomio $P(x) = 8x^4 - 6x^2 + x$ por el polinomio $Q(x) = 2x^2 - 3$

1. Escribimos ambos polinomios en forma decreciente; y el polinomio dividendo completo.

$$8x^4 + 0x^3 - 6x^2 + x + 0 \quad \underline{|2x^2 - 3}$$

2. Calculamos el cociente entre el termino principal de P(x) y el del divisor Q(x). Esto es $8x^4 / 2x^2 = 4x^2$ Luego multiplicamos este cociente por el divisor y lo restamos de P(x).

$$\begin{array}{rl} 8x^4+0x^3-6x^2+x+0 & \underline{|2x^2-3} \\ - \quad & 4x^2 \\ \underline{8x^4+0x^3-12x^2 \qquad} & \\ \color{red}{0x^4}+0x^3+6x^2+x+0 & \end{array}$$

3. Calculamos ahora el cociente entre el término de mayor grado de la resta y el divisor Q(x). En nuestro ejemplo tenemos $6x^2/2x^2=3$. Multiplicamos el divisor por este cociente y lo restamos al polinomio que obtuvimos en el paso anterior.

$$\begin{array}{rl} 8x^4+0x^3-6x^2+x+0 & \underline{|2x^2-3} \\ - \quad & 4x^2+3 \\ \underline{8x^4+0x^3-12x^2 \qquad} & \\ \color{red}{0x^4}+0x^3+6x^2+x+0 & \\ - \quad & \\ \underline{6x^2+x+9} & \\ \color{red}{0x^2}+x+9 & \end{array}$$

Por lo tanto, el polinomio cociente es $C(x)=4x^2+3$ y el polinomio resto es $R(x)=x+9$ (observemos que el grado del polinomio resto es menor al grado del polinomio divisor).

<u>Ejemplo</u>: Si $P(x)=2x^6-4x^2+5$ y $Q(x)=x^3+2x-3$, realizar $P(x):Q(x)$.

$$\begin{array}{rl} 2x^6+0x^5+0x^4+0x^3-4x^2+0x+5 & \underline{|x^3+2x-3} \\ - \quad & 2x^3-4x+6 \\ \underline{2x^6 \qquad +4x^4-6x^3 \qquad\qquad} & \\ \color{red}{0x^6}+0x^5-4x^4+6x^3-4x^2+0x+5 & \\ - \quad & \\ \underline{-4x^4 \qquad -8x^2+12x} & \\ \color{red}{0x^4}+6x^3+4x^2-12x+5 & \\ - \quad & \\ \underline{6x^3 \qquad +12x-18} & \\ \color{red}{0x^3}+4x^2-24x+23 & \end{array}$$

Por lo tanto, el polinomio cociente es $C(x)=2x^3-4x+6$ y el polinomio resto es $R(x)=4x^2-24x+23$.

MÉTODO (REGLA) DE RUFFINI

El método de Ruffini permite realizar, de forma sencilla, divisiones de polinomios en el caso particular en el que el polinomio divisor sea de la forma $Q(x) = x - c$, $c \in \mathbb{R}$.

Procedimiento para hallar el cociente y el resto de dividir al polinomio $P(x)$ por $Q(x)$:

1. Escribimos el polinomio *P(x)* en forma decreciente y si el polinomio no es completo agregamos los términos faltantes multiplicados con coeficiente cero:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 x^0$$

2. Colocamos los coeficientes de *P(x)* de la siguiente forma:

$$\begin{array}{r|cccccc} & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \\ & & & & & & \\ \hline & & & & & & \end{array}$$

3. Como el divisor es $Q(x) = x - c$, consideramos el valor c:

$$\begin{array}{r|cccccc} & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \\ c & & & & & & \\ \hline & & & & & & \end{array}$$

4. Bajamos el valor del coeficiente principal a_n:

$$\begin{array}{r|cccccc} & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \\ c & \downarrow & & & & & \\ \hline & a_n & & & & & \end{array}$$

5. Realizamos multiplicaciones y sumas sucesivas con cada uno de los coeficientes hasta llegar al final:

$$\begin{array}{r|cccccc} & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \\ c & \downarrow & c \cdot a_n & & & & \\ \hline & a_n & a_{n-1} + c \cdot a_n & & & & \end{array}$$

6. El último número obtenido será el resto de la división y los anteriores a él serán los coeficientes del polinomio cociente.

Ejemplo: Sean $P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 5$ y $Q(x) = x - 3$, realizar la división $P(x):Q(x)$ aplicando el método de Ruffini.

Para comenzar escribimos el polinomio *P(x)* en forma decreciente y si el polinomio no es completo agregamos los términos faltantes multiplicados por cero, así resulta:

$$P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 0x + 5$$

Como el divisor es $Q(x) = x - 3$, tenemos el valor c = 3.

Realizamos la división con la ayuda de una tabla en la que colocamos en la primera fila los coeficientes del polinomio *P(x)* y a la izquierda de la línea vertical colocamos el valor de c. A continuación, describimos los cálculos que se realizan para completar la tabla y hallar así el cociente y el resto de la división.

1. El primer coeficiente de *P(x),* que en este caso es 2, se reescribe en la tercera fila, luego se multiplica por 3 y el resultado se coloca debajo del segundo coeficiente de *P(x).*

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -7 & 0 & 5 \\ 3 & \downarrow & 6 & & \\ \hline & 2 & & & \end{array}$$

2. Sumamos el segundo coeficiente con el valor que agregamos en el paso anterior y colocamos el resultado debajo de ambos en la tercera fila. Luego multiplicamos este último valor por 3 y colocamos el resultado en la segunda fila debajo del tercer coeficiente *P(x).*

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -7 & 0 & 5 \\ 3 & \downarrow & 6 & -3 & \\ \hline & 2 & -1 & & \end{array}$$

3. El proceso se sigue repitiendo hasta completar la tabla.

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -7 & 0 & 5 \\ 3 & \downarrow & 6 & -3 & -9 \\ \hline & \underbrace{2 \quad -1 \quad -3}_{\textit{Coeficientes del polinomio cociente}} & & & \underbrace{\boxed{-4}}_{\textit{Resto}} \end{array}$$

El último valor en la tercera fila de la tabla es el *resto de la división*, en este caso es $R(x) = -4$. Los demás valores son los *coeficientes del polinomio cociente* ordenados en forma decreciente. Así en este ejemplo resulta $C(x) = 2x^2 - x - 3$. Finalmente se puede verificar que:

$$P(x) = Q(x).C(x) + R(x) = (x - 3).(2x^2 - x - 3) - 4$$

Observación: El polinomio cociente, tiene un grado menos que el polinomio dividendo *P(x)* y el resto es una constante, es decir, el resto es el polinomio nulo o un polinomio de grado cero.

DIVISIBILIDAD DE POLINOMIOS

Definición: Si al dividir un polinomio $P(x)$ por un polinomio no nulo $Q(x)$, el resto es cero, se dice que el polinomio $P(x)$ **es divisible por el polinomio** $Q(x)$ o que $Q(x)$ **divide a** $P(x)$**.**

Ejemplo: Consideremos los siguientes polinomios: $P(x)=x^3+2x+12$**,** $Q(x)=x-2$**,** $R(x)=x+2$

(a) ¿Es *P(x)* divisible por *Q(x)*?

(b) ¿Es *P(x)* divisible por *R(x)*?

(Dejamos como tarea pensarlo)

¿Habrá alguna otra manera de saber si un polinomio es divisible por otro sin necesidad de realizar la división entera?

- Si el polinomio divisor es de grado igual o mayor a dos o es un polinomio de grado uno no mónico, se debe realizar la división entera entre los polinomios;
- Si el polinomio divisor es mónico y de grado 1, es posible determinar el resto de la división sin necesidad de efectuar la operación. El teorema siguiente lo explica:

TEOREMA DEL RESTO

El resto de la división entre un polinomio $P(x)$ y un binomio (polinomio) de la forma $(x-a)$, es igual al valor numérico del polinomio cuando x toma el valor "*a*", que podemos expresar como $P(a)$.

Volviendo a los polinomios *P(x), Q(x)* y *R(x)*, ¿es posible aplicar el teorema del resto? (Lo analizaremos en clase).

RAÍCES REALES DE UN POLINOMIO

Definición: Las **raíces de un polinomio** (también llamadas ceros de un polinomio) son los valores (números reales) para los cuales, el valor numérico del polinomio es igual a cero. Es decir, un valor *a* es una raíz de un polinomio si *P(a)=0*.

Ejemplo: Tenemos el siguiente polinomio: $P(x)=x^2+2x-8$

Hallemos el valor numérico del polinomio para cuando $x=1$:

$$P(1)=1^2+2.1-8=1+2-8=-5\neq 0$$

Por lo tanto, **1 no es un cero o raíz del polinomio**.

Vamos a probar con $x=2$:

$$P(2)=2^2+2.2-8=4+4-8=0$$

Podemos concluir que **2 es un cero o raíz del polinomio** $P(x)$

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

Definición: **Factorizar un polinomio** significa poder expresarlo como producto de otros polinomios. En muchas ocasiones, factorizar un polinomio resulta útil para resolver ecuaciones, inecuaciones o simplificar expresiones algebraicas.

Para realizar este proceso, se aplican diversos recursos algebraicos, algunos de los cuales analizaremos a continuación.

Casos de Factoreo

Factor común

Una expresión algebraica es **factor común** de todos los términos de otra expresión cuando aparece repetida en cada uno de sus términos.

Para extraer factor común se debe proceder de manera inversa a la aplicación de la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma (o resta).

Primero se debe reconocer cuál es el factor que se encuentra repetido en cada término (considerando el menor exponente visible) y luego, para encontrar la expresión del factor que va entre paréntesis, se divide cada término de la expresión original por el factor común.

<u>Observación</u>: El polinomio que resulta quedar entre paréntesis al sacar factor común, debe tener igual número de términos que el polinomio original dado.

<u>Ejemplos</u>:

(a) Considerando el polinomio $R(x)=x^5+3x^3-2x^2-5x$ se puede observar que se repite la indeterminada *x* en todos los términos. Seleccionamos entonces como factor común a *x* con el menor exponente visible, en este caso 1.

$$\begin{aligned} R(x) &= x^5+3x^3-2x^2-5x \\ &= \boxed{x.\left(x^4+3x^2-2x-5\right)} \end{aligned}$$

(b) Considerando $Q(x)=8x^2-4x^3+16x^4+12x^5$, descomponemos en primos los coeficientes y se selecciona aquel que se repita en todos los términos con el menor exponente visible (al igual que sucede con la letra).

$$\begin{aligned} Q(x) &= 8x^2-4x^3+16x^4+12x^5 \\ &= 2^3x^2-2^2x^3+2^4x^4+2^2 3x^5 \\ &= 2^2x^2.\left(2-x+4x^2+3x^3\right) \\ &= \boxed{4x^2.\left(2-x+4x^2+3x^3\right)} \end{aligned}$$

(c) $P(x)=7x^3+49x^2=\boxed{7x^2.\left(x+7\right)}$

Factor común en grupos

Se aplica a expresiones algebraicas que no tienen un factor común en todos sus términos. En primer lugar, si se quiere factorizar una expresión algebraica por este método, se debe tener en cuenta que la misma debe tener un número par de términos (por lo menos cuatro términos). El método es similar al anterior, agrupando los términos que admiten factor común.

Los pasos a seguir son:

1. Se forman grupos de igual cantidad de términos, de forma tal que en cada uno de ellos haya un factor común.
2. En cada término debe aparecer el mismo factor entre paréntesis para poder extraerlo nuevamente.
3. Al sacar nuevamente factor común, la expresión queda factorizada a través del factor común por grupos.

Ejemplos:

(a) Considerando el polinomio x^5-2x^4-3x+6, agrupamos términos que contengan un factor o factores comunes: $\underbrace{x^5-2x^4}\underbrace{-3x+6}$

Extrayendo factor común obtenemos: $x^4.(x-2)-3.(x-2)$

Recordemos que la expresión resultante entre paréntesis debe ser la misma en ambos términos (en este caso x-2), por lo que podemos extraer nuevamente ese factor común, quedando finalmente:

$$(x-2).(x^4-3)$$

(b) En el polinomio $4x^3-1-x^2+4x$ debemos utilizar la propiedad conmutativa de la suma, para poder reordenar de manera conveniente los términos:

$$4x^3+4x-1-x^2$$
$$4x.(x^2+1)-(1+x^2)$$
$$(x^2+1).(4x-1)$$

Observemos que, en este ejemplo, sacamos factor común -1 en el segundo agrupamiento para lograr obtener la misma expresión que se encuentra entre paréntesis en el primer agrupamiento x^2+1.

Trinomio cuadrado perfecto

Para factorizar un trinomio por este método, debemos corroborar que esta expresión algebraica de tres términos sea equivalente a un binomio elevado al cuadrado. Es decir, dos de sus términos deben ser cuadrados perfectos y el otro es el doble producto de las bases de esos cuadrados.

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$
$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$

Ejemplos:

(a) Considerando el polinomio $x^2+8x+16$, debemos ver si se tienen dos términos que sean cuadrados perfectos (hallando sus bases) y que el tercero sea el doble producto de las bases.

$$\begin{array}{ccc} x^2 & +8x & +16=(x+4)^2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ (x)^2 & \downarrow & (4)^2 \\ & 2.x.4 & \end{array}$$

(b) $x^4+1-2x^2=(x^2-1)^2$

(c) $x^2+10x-25$ no es trinomio cuadrado perfecto ya que -25 no es un cuadrado perfecto.

(d) $36x^2+1-12x=(6x-1)^2$

Diferencia de cuadrados

Toda expresión algebraica que es diferencia de dos cuadrados es igual al producto de la diferencia de las bases de dichos cuadrados por la suma de las mismas, es decir:

$$a^2 - b^2 = (a-b).(a+b)$$

<u>Ejemplos</u>:

(a) Considerando el polinomio $x^2 - 9$ observamos que se tiene una resta de dos cuadrados. Buscamos las bases y lo expresamos como una suma por diferencia:

$$\underset{(x)^2}{\underset{\downarrow}{x^2}} - \underset{(3)^2}{\underset{\downarrow}{9}} = (x-3).(x+3)$$

(b) $x^4 - 1 = (x^2-1).(x^2+1) = \boxed{(x-1).(x+1).(x^2+1)}$

(c) $x^2 - 5 = \boxed{(x-\sqrt{5}).(x+\sqrt{5})}$

(d) $81 - x^4 = (9-x^2).(9+x^2) = \boxed{(3-x).(3+x).(9+x^2)}$

Factorización de un Polinomio a partir de sus raíces

Recordemos que se llama valor numérico de un polinomio para $x = a$, y lo escribimos $P(a)$, al número que resulta al reemplazar la variable del polinomio por *a* y realizar todas las operaciones. Por el Teorema del resto, si $P(a) = 0$, decimos que *a* es raíz del polinomio.

<u>Conclusión</u>:

<u>Definición</u>: Un polinomio $P(x)$ es divisible por $(x-a)$ sí y solo si, *a* es una raíz de $P(x)$.

Todo polinomio de una variable y de grado *n* que tenga *n* raíces reales puede expresarse de **forma factorizada** como:

$$P(x) = a_n.(x-x_1).(x-x_2)...(x-x_n)$$

Siendo a_n el coeficiente principal y $x_1, x_2... x_n$ sus raíces.

El **orden de multiplicidad** de una raíz en un polinomio es la cantidad de veces que aparece, en su expresión factorizada, el factor asociado a dicha raíz.

<u>Ejemplo</u>: Si $P(x)=3(x-1).(x+2)^3(x-5)^2$, entonces 1 es raíz simple (o con orden de multiplicidad 1), -2 es raíz triple (o con orden de multiplicidad 3) y 5 es raíz doble (o con orden de multiplicidad 2).

<u>Observaciones</u>:

- Tener un polinomio escrito en forma factorizada nos facilita la tarea de encontrar sus raíces.
- Es importante observar que no todo polinomio tiene raíces reales, pues no siempre una ecuación de la forma *P(x)* = 0 tiene solución en $\mathbb{R}$. Por ejemplo, el polinomio $P(x)=x^2+5$ no tiene ninguna raíz real, pues la ecuación *P(x)* = 0 no tiene soluciones reales.

<u>Ejemplos</u>: Expresar en forma factorizada a cada uno de los siguientes polinomios y determinar sus raíces reales.

(a) Consideremos el polinomio $P(x)=2x^4-8x^2$:

$$\begin{aligned} P(x)&=2x^4-8x^2 && \rightarrow \textit{extraemos factor común } 2x^2\\ &=2x^2\left(x^2-4\right) && \rightarrow \textit{aplicamos diferencia de cuadrados}.\\ &=2\boxed{x^2(x-2)(x+2)} \end{aligned}$$

Las raíces reales de P son: 0 de orden de multiplicidad 2, 2 de orden de multiplicidad 1 y -2 de orden de multiplicidad 1.

(b) A partir del polinomio $Q(x)=x^4-2x^3+x^2$:

$$\begin{aligned} Q(x)&=x^4-2x^3+x^2 && \rightarrow \textit{extraemos factor común } x^2\\ &=x^2\left(x^2-2x+1\right) && \rightarrow \textit{aplicamos trinomio cuadrado perfecto}\\ &=\boxed{x^2(x-1)^2} \end{aligned}$$

Las raíces reales de Q son: 0 de orden de multiplicidad 2 y 1 de orden de multiplicidad 2.

(c) Considerando el polinomio $R(x)=2x^6-32x^2$*:*

$$\begin{aligned} R(x)&=2x^6-32x^2 && \rightarrow \textit{extraemos factor común } 2x^2\\ &=2x^2\left(x^4-16\right) && \rightarrow \textit{aplicamos diferencia de cuadrados}\\ &=2x^2\left(x^2-4\right)\left(x^2+4\right) && \rightarrow \textit{aplicamos nuevamente diferencia de cuadrados}\\ &=\boxed{2x^2(x-2)(x+2)\left(x^2+4\right)} \end{aligned}$$

Las raíces reales de R son: 0 de orden de multiplicidad 2, 2 de orden de multiplicidad 1 y -2 de orden de multiplicidad 1.