La palabra ecuación viene del latín ***aequare*** que significa igualar.

Obtener la solución de una ecuación es, como lo analizaremos en los próximos temas, encontrar el o los valores de las incógnitas con los que se logra igualar los dos miembros de la misma.

Una ecuación es una propuesta de igualdad.

☞ Las siguientes expresiones son ecuaciones:

(a) $2x + 1 = 27$
(b) $l^2 = 4$
(c) $3x + 4y = 0$
(d) $x^3 = 81$
(e) $x^2 + 4 = 0$
(f) $x^2 - 2x + 1 = 0$

Nos detenemos a analizar las ecuaciones lineales o de primer grado con una incógnita; es decir, de la forma:

$$ax + b = 0 \quad , \quad con\ a, b \in \Re \ , \ a \neq 0 \quad , \quad x : incógnita$$

Planteo de ecuaciones

Plantear una ecuación es convertir un enunciado en lenguaje coloquial al lenguaje algebraico. Después de fijar la incógnita de un problema cada información del enunciado se transforma en una expresión algebraica.

☞

(1) Pienso un número, lo duplico, le sumo 5 y el resultado es 11. ¿Cuál es el número?

Lenguaje coloquial	Lenguaje algebraico
• número pensado	x
• duplico	$2x$
• sumo 5	$2x + 5$
• resultado es 11	$2x + 5 = 11$

Solución de ecuaciones

Resolver la ecuación significa responder a la pregunta: ¿para qué valor de la variable se verifica la igualdad?

Existen distintos métodos, y se puede elegir el que resulte más adecuado para cada problema, el más utilizado es el de transposición.

> Hay ecuaciones sin solución. Significa que no se cumplen para ningún valor de la(s) variable(s).
>
> Hay ecuaciones con infinitas soluciones. Significa que es verdadera para cualquier valor de la(s) variable(s).

Calculemos la solución de los ejemplos planteados por el método de transposición:

☞

$2x+5=11$ • ecuación original.

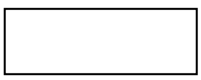
$2x=11-5$ • se suma –5.

$x=\frac{6}{2}=3$ • se multiplica por ½.

$S=\{3\}$ • Solución.

$$Verificación:\ 2.3+5=11$$

(2) En un rectángulo un lado es 5 cm. más largo que el otro, si el perímetro mide 32 cm. ¿cuánto mide cada lado?

Dibujo	Lenguaje coloquial	Lenguaje algebraico
x  $x + 5$	• lado más corto	x
	• lado más largo	$x + 5$
	• perímetro	$2x + 2(x + 5)$
	• perímetro igual a 32	$2x + 2(x + 5) = 32$

Solución

☞

$2x+2(x+5)=32$ • ecuación original.

$2x+2x+10=32$ • propiedad distributiva.

$4x+10=32$ • se opera en el primer miembro.

$4x=32-10$ • se suma –10.

$$4x = 22$$ • se resuelve el segundo miembro.

$$x = \frac{22}{4} = 5{,}5$$ • se multiplica por ¼.

$$Solución: \begin{cases} lado\ menor: 5{,}5\,cm. \\ lado\ mayor: 10{,}5\,cm. \end{cases}$$

$$Verificación: 2.5{,}5 + 2(5{,}5 + 5) = 11 + 2.10{,}5 = 11 + 21 = 32$$

☞ Diofanto fue un famoso matemático griego del siglo III d.C. De su vida no se sabe mucho, pero en el epitafio de su tumba aparecen algunos detalles sobre ella.

Diofanto vivió en Alejandría aproximadamente en el año 250 a.C. Escribió un libro titulado *Aritmética,* el cual se considera como el primero acerca de álgebra. En él se plantean métodos para obtener soluciones enteras de ecuaciones algebraicas. Este texto se ha leído por más de mil anos. Fermat hizo algunos de sus más importantes descubrimientos mientras estudiaba este libro. La principal contribución de Diofanto es el uso de símbolos para representar las incógnitas en un problema. Aunque su simbolismo no es tan sencillo como el que se utiliza hoy en día, fue un avance importante en comparación con escribir con palabras. En **la notación de** Diofanto la ecuación

$$x^5 - 7x^2 + 8x - 5 = 24$$

se escribe

$$\Delta K^{\gamma}\alpha\varsigma\theta\tilde{\Delta}\,\eta M\varepsilon\iota\kappa\delta$$

Nuestra moderna notación algebraica no se utilizó de forma común sino hasta el siglo XVII.

• *Caminante!. Aquí yacen los restos de Diofanto. Los números pueden mostrar, oh maravilla! La duración de su vida*	x
• *Cuya sexta parte constituyó la hermosa infancia*	$\frac{x}{6}$
• *Había transcurrido además una duocémina parte de su vida cuando se cubrió de vello su barba*	$\frac{x}{6} + \frac{x}{12}$
• *A partir de ahí, la séptima parte de su existencia transcurrió en un matrimonio estéril.*	$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7}$
• *Pasó, además, un quinquenio y entonces le hizo dichoso el nacimiento de su primogénito.*	$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5$
• *Este entregó su cuerpo y su hermosa existencia a la tierra habiendo vivido la mitad de lo que su padre llegó a vivir.*	$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2}$
• *Por su parte Diofanto descendió a la sepultura con profunda pena habiendo sobrevivido cuatro años a su hijo.*	$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4$
• *Dime, caminante, cuántos años vivió Diofanto hasta que le llegó la muerte.*	$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$
La edad de Diofanto es	$x = 84$

☞ **Más ejemplos.**

Calculá si existe la solución de las siguientes ecuaciones.

a) $x + 8 = 3$

$x = 3 - 8 = -5$ $\qquad S = \{-5\}$

b) $2x - 3 = \frac{1}{2}$

$2x = \frac{1}{2} + 3$ $\qquad S = \left\{\frac{7}{4}\right\}$

$x = \frac{7}{4}$

c) $3x - 1 = -2x + 4$

$3x + 2x = 4 + 1 = 5$ $\qquad S = \{1\}$

$5x = 5 \rightarrow x = 1$

d) $4 - 5(4x - 2) = x - 3(2x + 1)$

$4 - 20x + 10 = x - 6x - 3$

$-20x - x + 6x = -3 - 4 - 10$ $\qquad S = \left\{\frac{17}{15}\right\}$

$15x = 17$

e) $5-2(x+3)=\frac{-1}{2}(4x+2)$

$5-2x-6=-2x-1$

$-2x+2x=-1+6-5$

$0x=0$

$S=R$

Esto implica que cualquier x $\in$ R es solución de la ecuación, esto es, la ecuación tiene infinitas soluciones.

f) $3x-1=6\left(\frac{x}{2}+5\right)$

$3x-1=3x+30$

$3x-3x=30+1$

$0x=31$

$S=\phi$

Esto es un absurdo, lo que quiere decir que no existe ningún valor que satisfaga la ecuación. Decimos que el conjunto solución es vacío.

Otros tipos de ecuaciones con una incógnita.

> ***Si el producto de varios factores es cero, por lo menos uno de ellos es cero.***
>
> ***Si a.b=0 entonces a=0 o b=0.***

Usando esta propiedad es posible resolver ecuaciones no lineales con una variable, como las de los próximos ejemplos.

☞

a) $-8(x-1)=0$

b) $(3x+2)x=0$

c) $(3x+2)(5-x)(\sqrt{3}-2x)=0$

d) $\frac{3-2x}{x+2}=0$

e) $\frac{2-2(x-1)}{-2x+4}=0$

<u>SOLUCIONES:</u>

(a) $-8(x-1)=0$

$como\ -8\neq 0 \Rightarrow x-1=0\ luego\ x=1 \therefore S=\{1\}$

(b) $(3x+2)x=0$

debe ser $3x+2=0$

ó $x=0$

si $3x+2=0 \Rightarrow x=-\frac{2}{3}$

$\therefore S=\left\{0,-\frac{2}{3}\right\}$

(c) $(3x+2)(5-x)(\sqrt{3}-2x)=0$

debe ser $3x+2=0$ ó $5-x=0$ ó $\sqrt{3}-2x=0$

si $3x+2=0 \Rightarrow x=-\dfrac{2}{3}$

si $5-x=0 \Rightarrow x=5$

si $\sqrt{3}-2x=0 \Rightarrow x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore S=\left\{-\dfrac{2}{3},5,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

Los valores que anulan un cociente son los que anulan el numerador, pero no el denominador, ya que éste debe ser distinto de cero.

(d) $\dfrac{3-2x}{x+2}=0$

Para que se anule el cociente debe ser

$3-2x=0$ y $x+2\neq 0$

De $3-2x=0 \rightarrow x=\dfrac{3}{2}$ Como este valor no anula el denominador, es solución de la ecuación. $\therefore$ $S=\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$

(e) $\dfrac{2-2(x-1)}{-2x+4}=0$; $x\neq 2$

Debe ser $-2x+4\neq 0 \rightarrow x\neq \dfrac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{2}_{1}} \rightarrow x\neq 2$

Pero si $2-2(x-1)=0 \rightarrow 2-2x+2=0 \rightarrow -2x+4=0$

$x=2$

El conjunto solución es vacío, ya que el cociente es distinto de 0 para todo x para el que está definido. $\therefore$ $S=\phi$