Vectores

¿Alguna vez prestaste atención al mover una silla, que no se desplaza de la misma manera si la empujas de un punto o de otro?

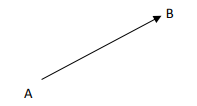
Además, seguro observaste que, si lo haces con más o menos fuerza, el efecto en la silla, es distinto.

Por otro lado, si te piden que la muevas paralela a la pared, tenés que pedir que te indiquen hacia cuál de los dos lados posibles debes efectuar el movimiento.

Todas esas aclaraciones suceden, evidentemente, porque no es suficiente con decir qué fuerza tenés que aplicar. Toda esa información adicional que has tenido que considerar, es lo que distingue a las magnitudes vectoriales. Ellas no quedan definidas solo por su magnitud o intensidad, sino que requieren otros datos igual de importantes para quedar definidas. En la figura siguiente, analizaremos:

Punto donde vas a aplicar la fuerza, qué dirección vas a emplear, la cantidad de fuerza que vas a hacer y en qué sentido irá dicha fuerza.



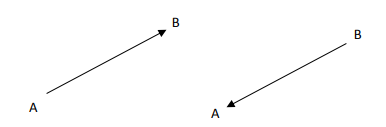
En términos formales a estas magnitudes, las denominamos **vectores**. Siendo estos los que permiten darnos en forma muy simple toda la información que mencionamos. 

De esta manera podemos decir que denominamos vector a un segmento orientado.

Es decir, consideremos dos puntos A y B del plano. Si tomamos al punto A como origen y al punto B como extremo queda definido el vector .

El punto “A” se llama origen del vector o punto inicial, y el punto “B”, extremo del vector o punto final. En este último (extremo del vector), se representa el punto de aplicación, es decir donde estará aplicada la magnitud según las consideraciones que ya indicamos. Otra notación posible es =

* Si :
* La **dirección** del vector es la dirección de la recta que determinan A y B. Es decir, la recta sobre la que se apoya el vector.
* Se llama **módulo** del vector al número real positivo que expresa la distancia entre A y B. Es decir, es la longitud del vector. Su notación es o .
* El **sentido** del vector es el que indica cuál es el origen y cuál el extremo. Entonces decimos que tiene sentido **opuesto** que .



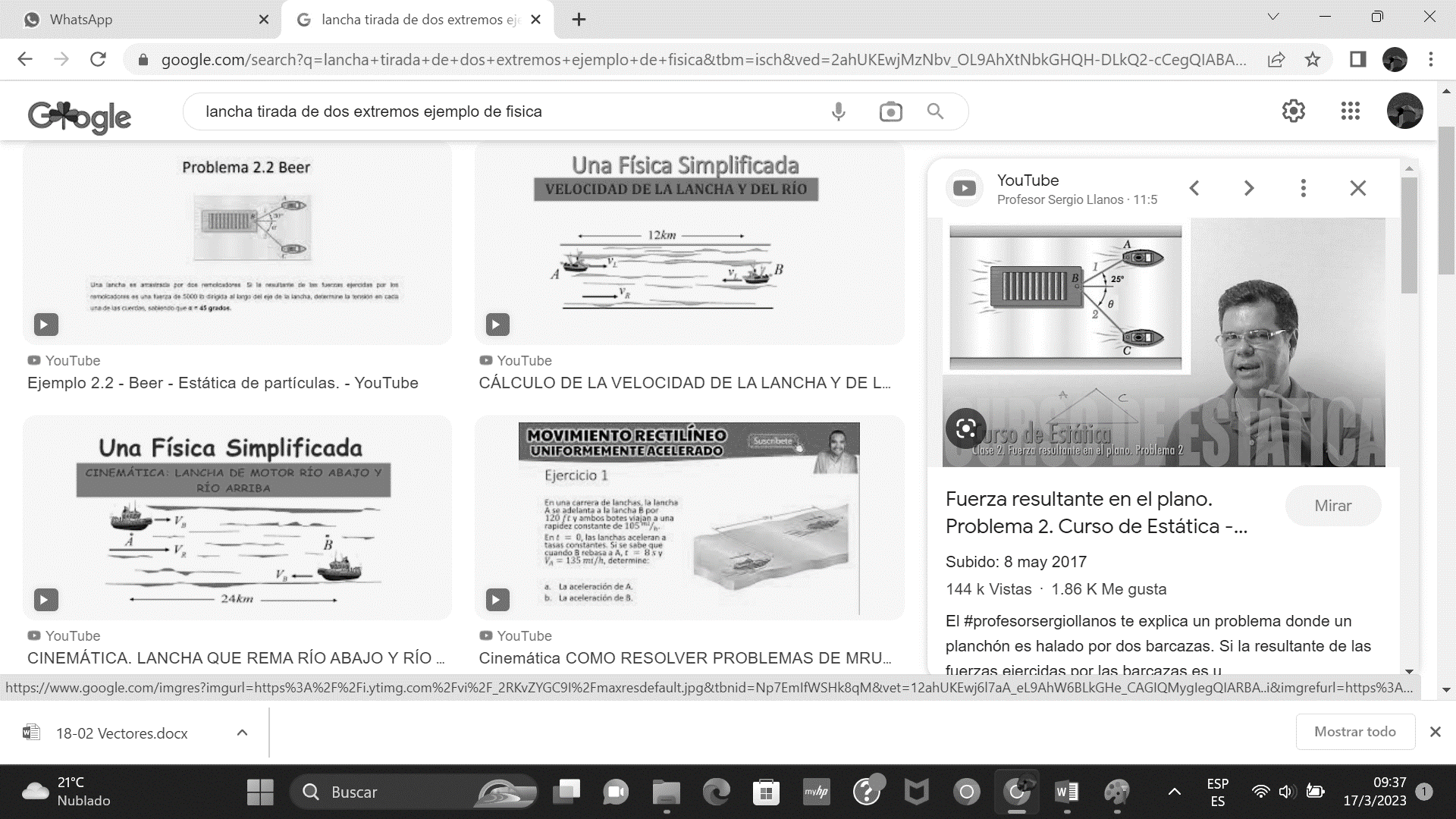
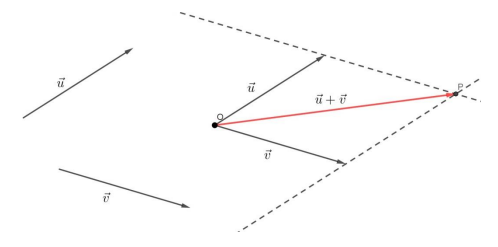
* Si A = B el segmento se reduce a un punto, en este caso no está determinada la dirección, no tiene módulo ni tampoco sentido. A pesar de ello, lo llamaremos vector nulo y lo notaremos .

Diremos que dos vectores no nulos y son equipolentes, si cumplen con tener igual dirección, sentido y módulo.

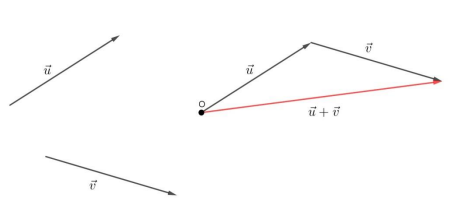
**Operaciones con vectores**

**Suma de vectores**: el resultado de la suma de dos vectores es otro vector, que se suele denominar resultante o vector suma, y se puede determinar gráficamente de la siguiente manera:

* Con la **regla del paralelogramo**:

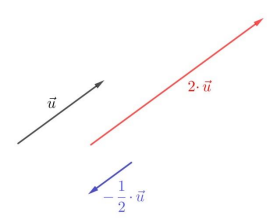


* Con la **regla de la poligonal** (triángulo):

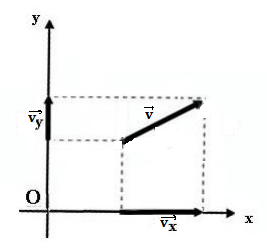


Observación: realizar es equivalente a , es decir, el vector se suma con el opuesto del vector .

**Producto de un escalar por un vector:** el producto de un vector por un escalar λ∈R, es otro vector que lo notamos λ⋅ que tiene las siguientes características:

* Si λ= 0 o entonces λ.
* Si λ≠ 0 y entonces:
* λ. posee igual dirección que
* si λ>0 entonces λ. tiene igual sentido que . Si λ<0 entonces λ. tiene sentido contrario que .

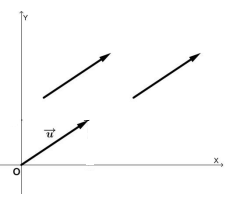
**Componentes cartesianas de un vector**

Así como analizamos y concluimos que dos o más vectores nos permiten obtener una resultante, es posible partiendo de una resultante, obtener dos vectores. 

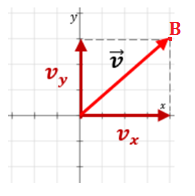
En este caso nos interesa obtener una expresión numérica de los vectores para hacer operaciones entre ellos de forma eficiente y exacta. Para esto vamos a considerar la proyección ortogonal (a 90º) del vector sobre el eje x y sobre el eje y. A estos vectores los denominamos y y sus direcciones coinciden con los ejes de coordenadas cartesianas.

Decimos entonces que si es un vector del primer cuadrante los módulos de y son las COMPONENTES CARTESIANAS del vector y lo notamos: .

Si alguno de los vectores o tuviera sentido opuesto a los ejes de coordenadas, dicha componente del vector será negativa.

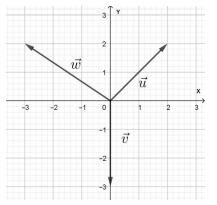
Observaciones: 

1) Trabajaremos con un representante de todos los vectores equipolentes: aquel que tiene origen en el origen O de un sistema de coordenadas cartesianas.

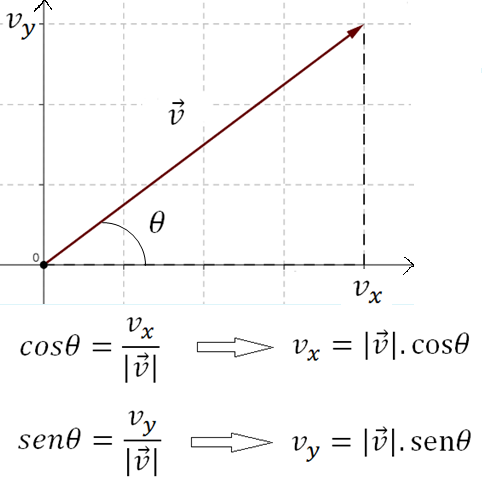


2) Como trabajaremos con vectores cuyo origen será O, podemos afirmar que las componentes del mismo coincidirán con las coordenadas del punto extremo.

Ejemplo: Indicar las componentes de los siguientes vectores.

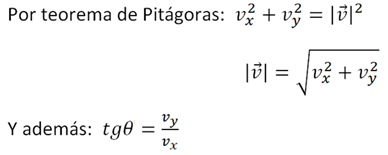


**¿Cómo calcular las componentes cartesianas de un vector?**

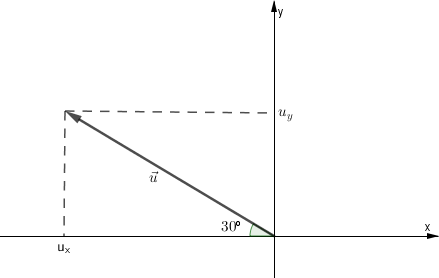


Consideremos un vector del cual conocemos su módulo y el ángulo que forma con el eje positivo de las x (dirección), entonces podemos calcular sus coordenadas cartesianas usando razones trigonométricas:

Recíprocamente,

****

Ejemplos:

1) Calcular las componentes del vector de la figura sabiendo que su módulo es 10. Observemos que el ángulo de 30° está medido respecto al semieje negativo de las **x**. Si empleamos el seno y el coseno para el cálculo de las componentes, considerando el ángulo de 30°, el coseno nos devolverá un valor de componente positiva, mientras que la realidad es que dicha componente es negativa (su sentido está dirigido en el sentido de las **-x**). Si en cambio medimos el ángulo desde el semieje positivo “x”, su valor es 150°. Si aplicamos el coseno a este valor, el resultado será negativo, coincidiendo con el real sentido de la componente. 

Ahora bien, ¿está mal el primer razonamiento? La realidad es que no.

Solo tenemos que tener la precaución de saber qué signo asignar en función del sentido de la componente.

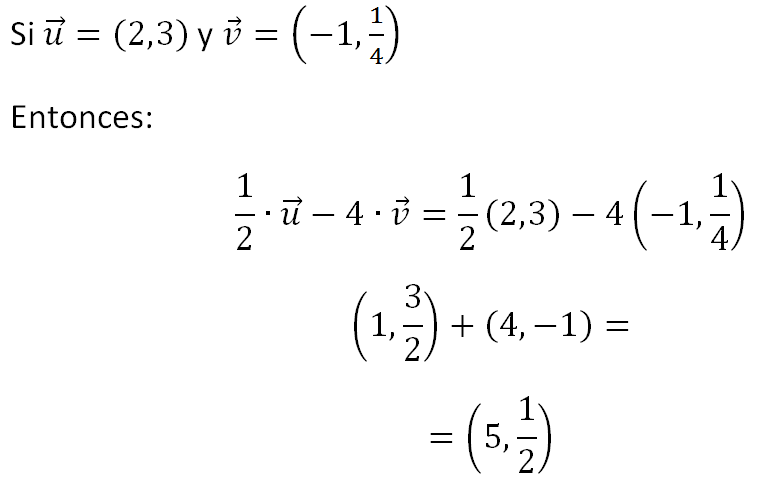
2) Calcular el módulo y la dirección de .

**Operaciones a partir de componentes**

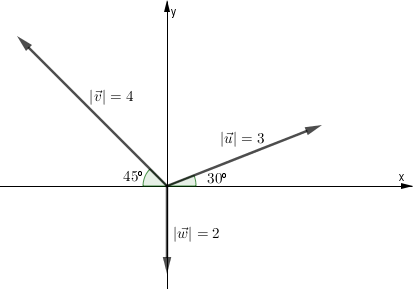
Sean y definimos:

* Suma:
* Producto por un escalar: Si entonces

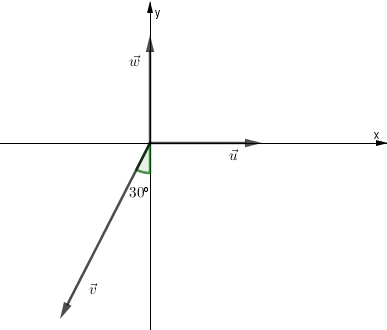
Ejemplos:



1)

2) Con los vectores de la figura, calcular .

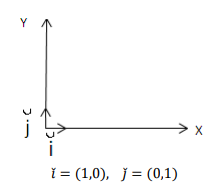
3) Si el vector tiene módulo 15, calcular el módulo de sabiendo que la suma de ellos es el vector nulo.



**Versor**

En Física, para simplificar la identificación respecto de a qué eje pertenece cada componente, es necesario poder asignarle algún distintivo que nos otorgue esa información. Estos distintivos, son **vectores unitarios** de sentido positivo, que denominamos “**versores”**. Tendremos uno por cada eje, de manera que para el “**x**” utilizaremos el denominado “**versor ”**, mientras que para el eje “y” emplearemos el **“versor”**. De esta manera el vector componente es el producto del escalar con el versor **,** resultandola componente , y lo propio para la componente en “y”, resultando **.**

En términos matemáticos,si , el vector se denomina ***versor asociado a*** . Tiene igual dirección y sentido que y módulo 1.

De esta forma, es posible escribir un vector cualquiera a partir de .

Ejemplos:

1)

A la expresión la denominamos **forma binómica** de o **expresión vectorial** del vector .

2)

3)

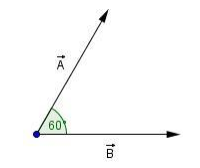
**Producto escalar**

Dados dos vectores llamamos producto escalar por definición entre y lo notamos o simplemente al número real definido como:

donde es el ángulo entre .

IMPORTANTE:

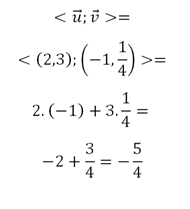
**Esto es, si para dos vectores no nulos el producto escalar es 0 entonces los mismos son ortogonales.**

Ejemplo: Dados los vectores de la figura, hallar el producto escalar si = 8 y = 5.

**¿Cómo calcular el producto escalar a partir de componentes?**

Sean y entonces:

Ejemplo 1: Si y entonces calcular el producto escalar entre y .



Ejemplo 2: Dados los vectores = 3𝑖̌+ 2𝑗̌ y = 5𝑖̌+ 1𝑗̌, hallar su producto escalar y el ángulo que forman entre sí.

Además sabemos por definición de producto escalar que:

Si calculamos el módulo a los vectores y obtenemos:

Finalmente: