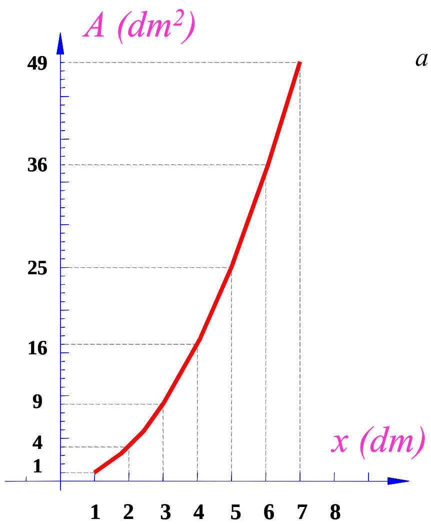
FUNCIONES CUADRÁTICAS

La curva que describe una pelota de básquetbol, los chorros de agua de una fuente, son parábolas. Las secciones de los faros de los coches, de las antenas que captan las emisiones de TV procedentes de satélites artificiales y muchos otros objetos presentes en la vida cotidiana, son parabólicos.

También muchas funciones se representan mediante parábolas: el área de un cuadrado en función del lado, la altura a la que se encuentra una piedra que lanzamos hacia arriba en función del tiempo transcurrido o la que cae libremente desde una cierta altura.

A continuación vamos a analizar las relaciones entre las funciones cuadráticas y las parábolas.

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA 1



Se desea fabricar cajas, con láminas cuadradas de hojalata; que miden de 1dm a 7 dm de lado. El área de cada lámina en función del lado es:

$$A(l) = l^2$$

A partir de la tabla de valores, se grafica

L (dm)	A (dm^2)
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49

$$Df = [1,7]$$
$$If = [1,49]$$

La fórmula de la función cuadrática que se utilizó para construir el modelo de la situación es:

$f(x) = ax^2$ con $a \in \Re\ ,\ a \neq 0$

donde $Df = \Re$

La representación gráfica es una parábola.

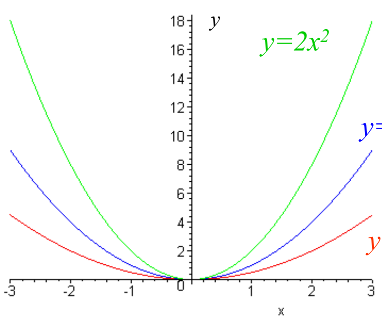
2.5.1 GRAFICO DE LAS FUNCIONES $y = ax^2$

Si a › 0, la función tiene un mínimo en el origen.

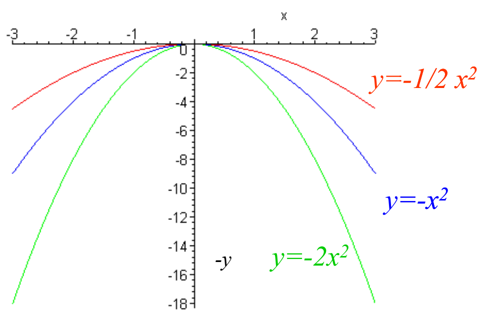
Si a ‹ 0, la función tiene un máximo en el origen.

Si $|a|$ › 1 el gráfico se obtiene contrayendo verticalmente el de $y = x^2$.

Si $|a|$ ‹ 1 el gráfico se obtiene dilatando verticalmente el de $y = x^2$.



$a > 0$



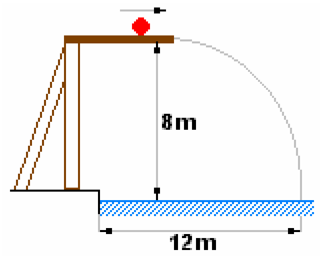
$a < 0$

Como se observa en las gráficas, la función toma el mismo valor para valores opuestos de *x,* su gráfico es simétrico respecto del eje *y*.

El eje *y* es el ***eje de simetría*** de la parábola; su ecuación es $x = 0$.

El único punto que pertenece al eje de simetría y la parábola es el ***vértice***. En estos casos es el punto $V(0,0)$.

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA 2



En una piscina hay un trampolín a 8 metros del agua. Lanzamos una pelota rodando y cae al agua a 12 metros del trampolín. Calculá la ecuación de la trayectoria que describe la pelota desde que sale del trampolín hasta que toca el agua.

SOLUCIÓN:

La trayectoria la podemos identificar inicialmente con la ecuación: $y = ax^2$, con $a < 0$ que se traslada verticalmente sobre el eje *y* en sentido positivo, luego podemos expresarla:

$y = ax^2 + c$ donde *c* indica la traslación en el eje *y*.

Con los datos del problema calculamos "a" y "c". La pelota sale del punto (0,8) y llega al (12,0), sustituyendo obtenemos:

$$(0,8) \quad \Rightarrow \quad 8 = a.0^2 + c \Rightarrow \quad c = 8$$

$$(12,0) \quad \Rightarrow \quad 0 = a.12^2 + 8$$

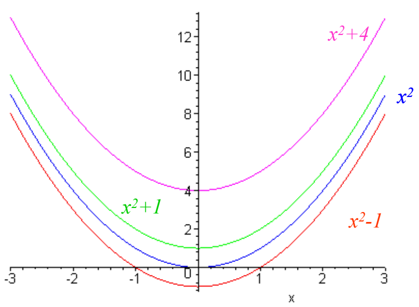
$$-8 = a.144 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{-8}{144} = -0{,}05$$

Luego, la ecuación de la trayectoria es:

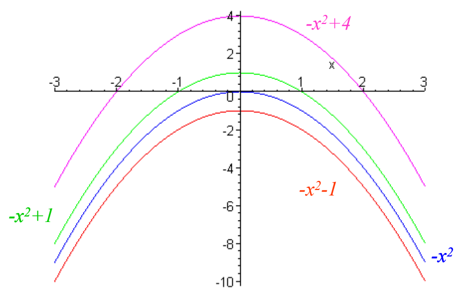
$$y = -0{,}05.x^2 + 8$$

2.5.2 GRAFICO DE LAS FUNCIONES $y = ax^2 + c$

Todas las parábolas tienen como eje de simetría al eje *y*, de ecuación $x=0$.
El vértice se desplaza sobre el eje *y* según los diferentes valores de *c:* $V(0,c)$.



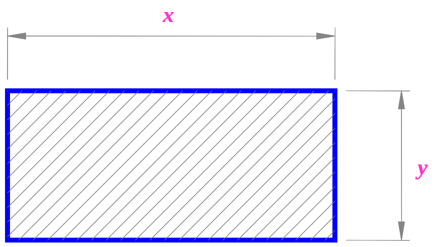
$a > 0$



$a < 0$

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA 3

Se desea calcular las dimensiones del cantero rectangular de mayor área que puede cercarse con 200 metros de alambre.



SOLUCIÓN:

- Dibujamos un diagrama.
- Asignamos nombres a los lados del rectángulo.
- Relacionamos los valores teniendo en cuenta el dato: 200 m de alambre para cercarlo, entonces:

$$200 = 2x + 2y \qquad (1)$$

- Planteamos la incógnita: área mayor:

$$A = x.y \qquad (2)$$

- De la ecuación (1), despejamos el valor de *"y"*:

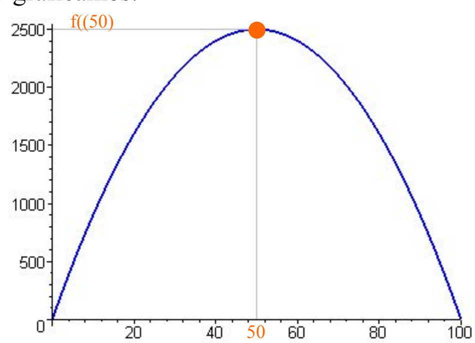
$$y = \frac{200 - 2x}{2}$$

- Sustituimos el valor en (2) y obtenemos:

$$A = x.\left(\frac{200 - 2x}{2}\right) \Rightarrow A = 100x - x^2 \qquad (3)$$

Realizamos una tabla de valores y graficamos:

x	A
0	0
20	1600
40	2400
50	2500
60	2400
80	1600
100	0



Con la información de la tabla y la gráfica observamos que:

- El máximo de la función se obtiene si $x=50$.

Luego las dimensiones del terreno se calculan reemplazando $x = 50$ en (1), de donde $y = 50$. Por lo tanto los lados del terreno miden:

$$x=50 \ ; \ y=50.$$

¿?

¿ Qué particularidad tiene este rectángulo?
¿ Qué podés inferir de esta situación?

La expresión que permite construir un modelo con esta situación es de la forma:

$$y = a(x - x_0)^2 + f(x_0)$$

En nuestro caso: $a = -1$; $x_0 = 50$; $f(x_0) = 2500$

$$y = -(x - 50)^2 + 2500$$

Efectuando las operaciones obtenemos:

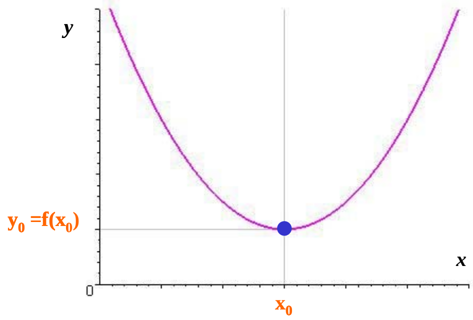
$$y = -(x^2 - 100x + 2500) + 2500$$

$$y = -x^2 + 100x - 2500 + 2500$$

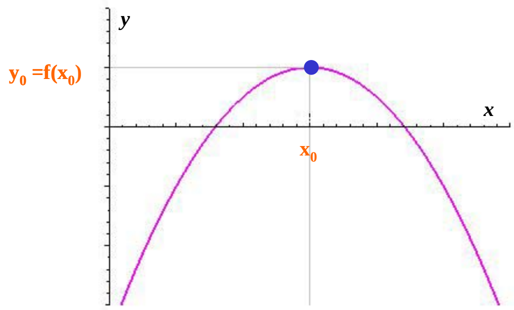
$$\boxed{y = -x^2 + 100x}$$

que coincide con la fórmula (3) que encontramos para expresar el área.

2.5.3 GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES: $y = a(x - x_0)^2 + f(x_0)$



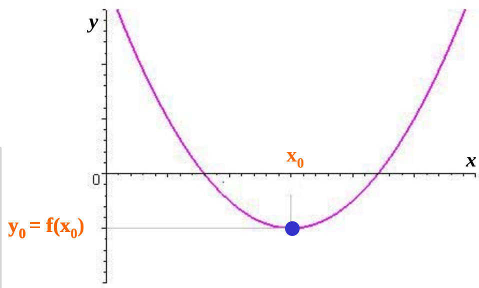
$a > 0$



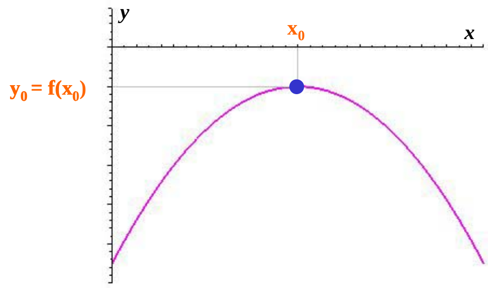
$a < 0$

¿?

¿Existen otras posibles gráficas?. ¿Cuáles?.



$a > 0$



$a < 0$

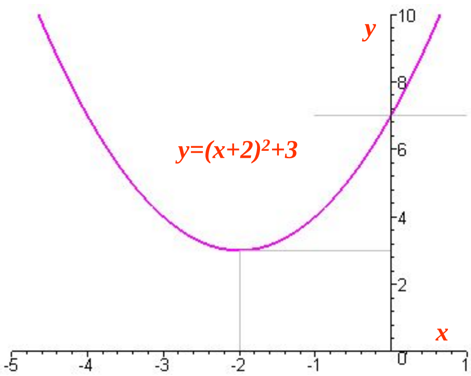
- Todas las parábolas tienen como ***eje de simetría*** a la recta: $x = x_0$
- El ***vértice*** es le punto $V\ (x_0, f(x_0))$ o $V(x_0, y_0)$
- La ***intersección con el eje y*** se obtiene calculando $f\ (0)$
- La ***intersección con el eje x***, que corresponde a los ceros de la función, se obtiene calculando la solución de la ecuación: $0 = a(x - x_0)^2 + f(x_0)$

ALGUNOS EJEMPLOS

1.- $y = (x+2)^2 + 3$

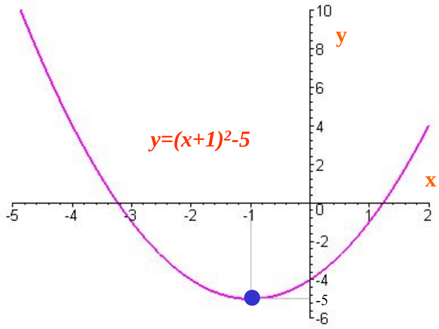
- Vértice $\rightarrow$ $V\ (-2\ ,\ 3)$
- Eje de simetría $\rightarrow$ $x = -2$
- Intersección eje y: $f(\ 0\ ) = 7$
- Intersección eje x:

$$0 = (x+2)^2 + 3$$
$$-3 = (x+2)^2$$



No tiene solución en R; luego no existe intersección con el eje x.

2.- $y = (x+1)^2 - 5$



- Vértice → $V(-1, -5)$
- Eje de simetría → $x = -1$
- Intersección eje y: $f(0) = -4$
- Intersección eje x:

$$0 = (x+1)^2 - 5$$
$$5 = (x+1)^2 \Rightarrow \sqrt{5} = |x+1|$$
$$entonces: \sqrt{5} = x+1 \quad o \quad -\sqrt{5} = x+1$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1+\sqrt{5} \\ x_2 = -1-\sqrt{5} \end{cases}$$

3.- $y = -2(x-1)^2 - 4$

- Vértice → $V(1, -4)$
- Eje de simetría → $x = 1$
- Intersección eje y: $f(0) = -6$
- Intersección eje x:

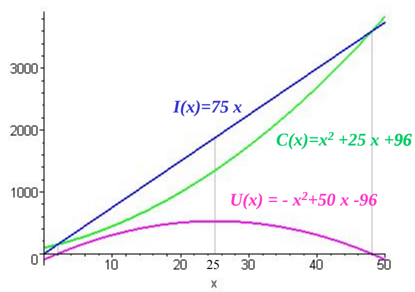
$$0 = -2(x-1)^2 - 4$$
$$4 = -2(x-1)^2$$
$$-\frac{4}{2} = (x-1)^2 \quad \Rightarrow \quad -2 = (x-1)^2 \text{ no tiene solución en } R$$

Luego no existe intersección con el eje *x*.

2.5.4 FUNCIÓN CUADRÁTICA DE LA FORMA: $f(x) = ax^2 + bx + c$

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA

Un decorador diseña y vende accesorios de pared y puede vender a un precio de $75 c/u de los accesorios que produce. Si se fabrican x accesorios diarios, el costo total diario de producción es $C(x) = x^2 + 25x + 96$. ¿Cuántos accesorios debe producir por día a fin de obtener las máximas utilidades?

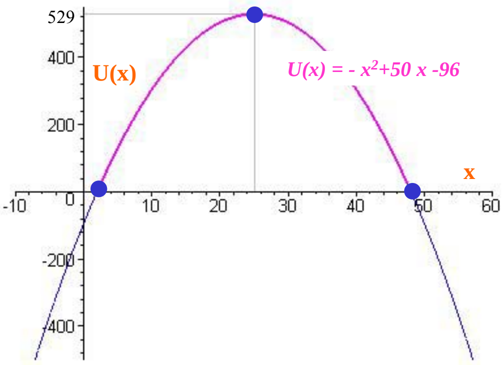


SOLUCIÓN:

- Las utilidades están dadas por las diferencias entre ingresos y costos.
- Como vende a $75 cada accesorio, si "x " es la cantidad de accesorios, el ingreso está dado por: $I(x) = 75.x$
- El costo diario según los datos se calculan por: $C(x) = x^2 + 25x + 96$
- Luego las utilidades se determinan por: $U(x) = I(x) - C(x)$, y reemplazando:

  $U(x) = 75x - x^2 - 25x - 96$

  y operando se obtiene:



$$U(x) = -x^2 + 50x - 96$$

- Para calcular el número de accesorios que determinan las máximas utilidades tenemos que hallar el ***vértice*** de la parábola, la abscisa correspondiente dará el número pedido.
- Un camino para hallar el vértice es completar cuadrados, para llevar la función a la forma: $y = a(x - x_0)^2 + f(x_0)$.
- Procedemos del siguiente modo:

$U(x) = -(x^2 - 50x) - 96$	$\rightarrow$	Factor común *(-1)* entre los términos en *x*.
$U(x) = -\left[(x-25)^2 - 625\right] - 96$	$\rightarrow$	Completamos el cuadrado dentro del paréntesis.
$U(x) = -(x-25)^2 + 625 - 96$	$\rightarrow$	Multiplicamos por *(-1)*.
$U(x) = -(x-25)^2 + 529$	$\rightarrow$	Entonces el vértice está en *V(25,529*), luego el número de accesorios que debe vender para lograr el máximo beneficio es: *25*.

¿?

¿Qué información dan los puntos de corte en el eje x?.

¿Por que crees que la gráfica debajo del eje x está dibujada con otro color?

La función cuadrática que modeliza la situación anterior está dada por la fórmula:

$$f(x) = ax^2 + bx + c\,, \qquad \text{con } a,\, b,\, c \in R\,; \quad a \neq 0$$

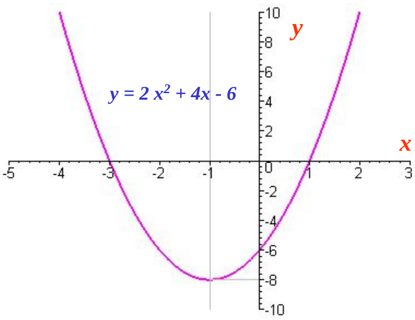
y se la denomina ***función cuadrática completa***.

Para graficar es conveniente conocer previamente el *vértice*, el eje de simetría y las intersecciones con los ejes coordenados.

ALGUNOS EJEMPLOS

1. $y = 2x^2 + 4x - 6$

SOLUCIÓN:



- Calculamos el vértice

$y = 2(x^2 + 2x) - 6$	$\rightarrow$	Factor común entre los términos en *x*.
$y = 2\left[(x+1)^2 - 1\right] - 6$	$\rightarrow$	Completamos el cuadrado dentro del paréntesis.
$y = 2(x+1)^2 - 2 - 6$	$\rightarrow$	Multiplicamos por dos los términos dentro del corchete.
$y = 2(x+1)^2 - 8$	$\therefore$	Entonces el vértice está $V(-1,-8)$.

- Eje de simetría: $x = -1$
- Intersecciones en los ejes:

  Eje $y \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = -6 \Rightarrow f(0) = -6$

  Eje $x \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 0 = 2(x+1)^2 - 8$

- La abscisa del vértice equidista de los puntos de intersección con el eje x.
- Se puede calcular:

$$x_V = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

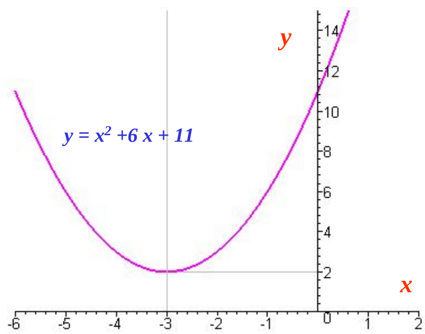
$$8 = 2(x+1)^2$$
$$4 = (x+1)^2$$
$$\sqrt{4} = |x+1| \Rightarrow \pm 2 = x+1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

2. $y = x^2 + 6x + 11$

SOLUCIÓN:

- Calculamos el vértice

$y = (x+3)^2 - 9 + 11$	$\rightarrow$	Completamos el cuadrado .
$y = (x+3)^2 + 2$	$\therefore$	$V(-3,2)$



- Eje de simetría: $x = -3$
- Intersecciones con los ejes

Eje $y \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 11 \Rightarrow f(0) = 11$

Eje $x \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 0 = (x+3)^2 + 2$

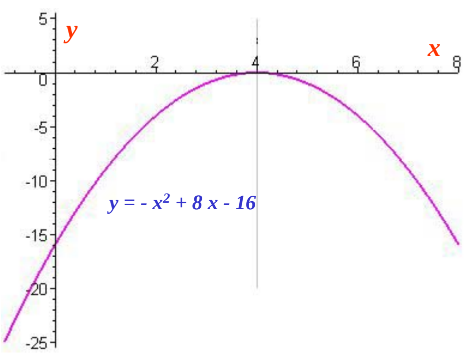
$-2 = (x+3)^2 \Rightarrow$ no hay solución en $\Re$, ¿Por qué?. Por lo tanto no hay intersección con el eje x.

3. $y = -x^2 + 8x - 16$

SOLUCIÓN:

- Calculamos el vértice

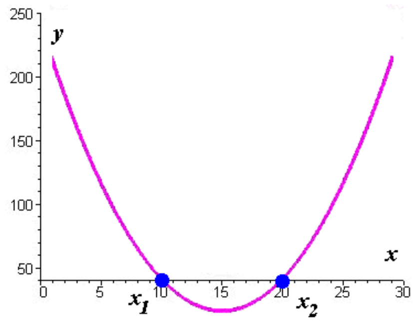
$y = -(x^2 - 8x + 16)$	$\rightarrow$	Sacamos factor común .
$y = -\left[(x-4)^2\right]$	$\rightarrow$	Completamos el cuadrado.
$y = -(x-4)^2$	$\therefore$	$V(4,0)$

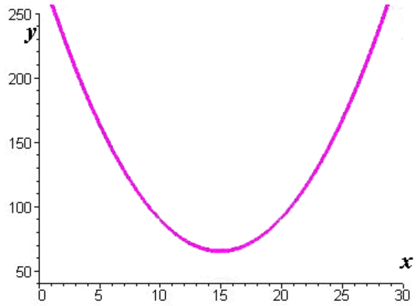


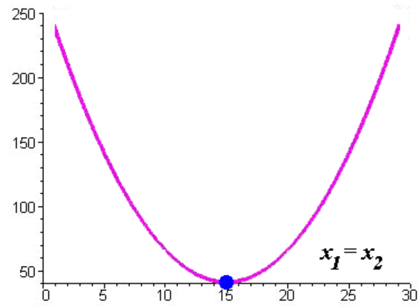
- Eje de simetría: $x = 4$
- Intersecciones en los ejes:
  Eje $y \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = -16 \Rightarrow f(0) = -16$
  Eje $x \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 0 = -(x-4)^2 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow (4,0)$

Entonces el punto de corte con el eje x coincide con el vértice.

La gráfica de la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ puede tener distintas posiciones respecto del eje x, las cuales se muestran en las figuras siguientes. Sea para el caso $a > 0$.







2.5.5 CEROS DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Calcular, si existen, los valores x_1 y x_2 significa resolver la ecuación algebraica

$$0 = ax^2 + bx + c$$

cuya solución se puede obtener como se procedió en los ejemplos anteriores completando el cuadrado y calculando: x_1 y x_2 o utilizando la fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Así, en el ejemplo **1.** si: $y = 2x^2 + 4x - 6$, entonces $a = 2$; $b = 4$; $c = -6$; reemplazando los valores en la fórmula se obtiene:

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4.2.(-6)}}{2.2} = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{4} = \frac{-4 \pm 8}{4} = \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

En el ejemplo 2. $y = x^2 + 6x + 11$, entonces $a = 1$; $b = 6$; $c = 11$, reemplazando los valores en la fórmula se obtiene:

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4.1.11}}{2.1} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 44}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{-8}}{2} =$$

No tiene solución en los R, luego como ya se observó no hay intersección con el eje x.

En el ejemplo **3.** $y = -x^2 + 8x - 16$,entonces $a = -1$; $b = 8$; $c = -16$, reemplazando los valores en la fórmula se obtiene:

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4.(-1).(-16)}}{2.(-1)} = \frac{-8 \pm \sqrt{0}}{-2} = 4$$

luego $x_1 = x_2 = 4$ $\therefore$ existe un único punto de intersección.

2.5.6 FACTORIZACIÓN DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

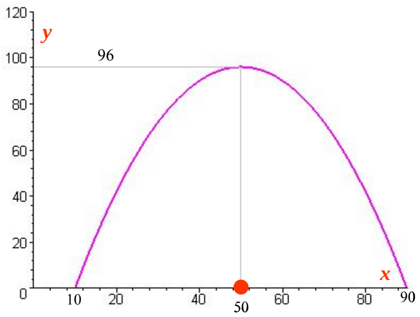
Si conocemos el valor del coeficiente del término de segundo orden *"a"* y los valores correspondientes a los puntos de intersección con el *eje x:* x_1 y x_2, la función se puede expresar:

$$y = a(x - x_1).(x - x_2)$$

A partir de esta fórmula se calcula fácilmente el vértice de la parábola, $V(x_V, y_V)$, donde:

$$x_V = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad ; \qquad y_V = f(x_1)$$

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA



El rendimiento en *(%)* de un generador de placas solares en función de la temperatura está dado por una función cuadrática. Se sabe que el máximo *(96 %)* se tiene para una temperatura de *50 °C* y que es nulo para *10°C* y *90 °C*.

(a) Dibuja una gráfica que represente esta situación

(b) Escribe la ecuación que la representa.

SOLUCIÓN:

(b) Podemos expresar esta situación con la siguiente fórmula

$$y = a.(x - 10)(x - 90) \qquad (\ *\ )$$

El máximo corresponde al punto *(50 ,* 96). Sustituyendo en (*) calculamos el valor de *"a"*.

$$96 = a.(50 - 10)(50 - 90)$$

$$96 = a.(40)(-40) \quad \Rightarrow a = \frac{-96}{1600} = -0{,}06$$

$\therefore$ la ecuación que representa la situación es:

$$y = (-0{,}06).(x - 10)(x - 90)$$

A modo de síntesis:

Toda función cuadrática se representa gráficamente por una parábola y toda parábola, con eje paralelo al eje y, es la gráfica de una función cuadrática.