GRÁFICOS DE FUNCIONES

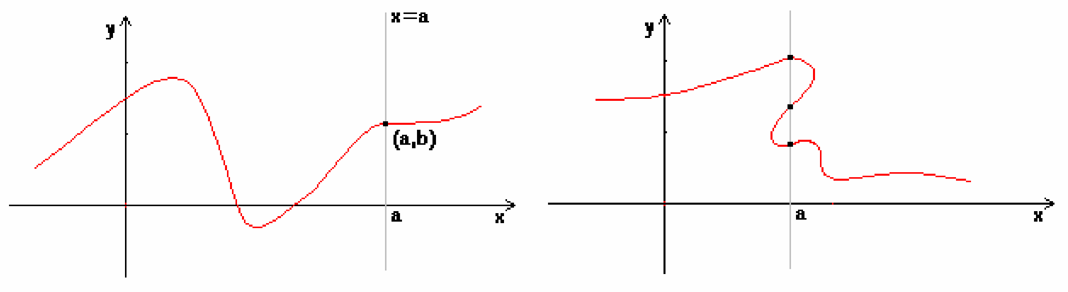
Nos interesa especialmente un grupo de funciones: aquellas cuyo dominio e imagen coinciden o están contenidos en el conjunto de los números reales, y reciben el nombre de **funciones reales de variable real.**

Si f es una función con dominio en A entonces la gráfica de f es el conjunto de pares ordenados $(x, y) = (x, f(x))$ con $x \in A$

DEFINICIÓN: Sea $D_f \subset R$, se llama **gráfica de f** al conjunto de puntos (x, y) del plano *donde* $x \in D_f$ e $y = f(x)$. Indicamos:

$$G(f) = \{ (x, f(x)) \ / \ x \in D_f \}$$

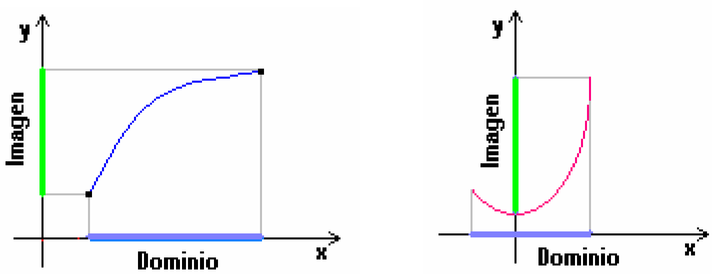
- La gráfica de una función siempre puede representarse de izquierda a derecha, nunca regresa hacia atrás, porque eso significaría que para un valor de la variable independiente existen varios valores de la variable dependiente, como se observa en las figuras



Prueba de la recta vertical

Una curva en el plano es la gráfica de una función si y sólo si ninguna recta vertical interseca a la curva más de una vez

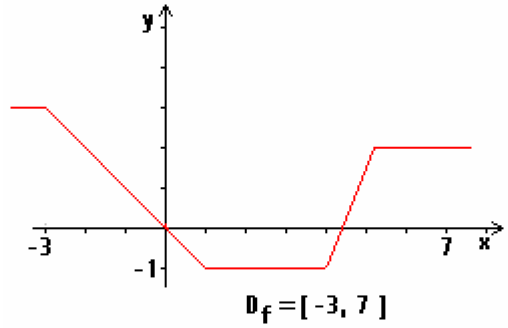
- La gráfica también nos permite representar el dominio e imagen de f sobre los ejes coordenados, como se muestra en la figura



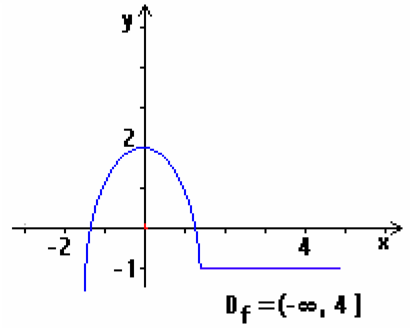
ACTIVIDAD

En cada uno de los siguientes gráficos de funciones, calculá la imagen de la función atendiendo al dominio indicado.

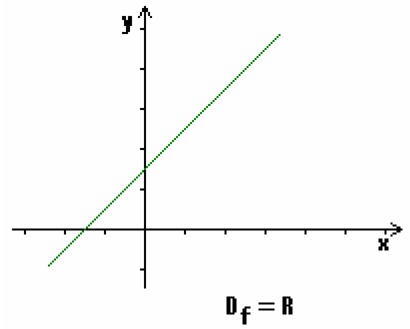
a.



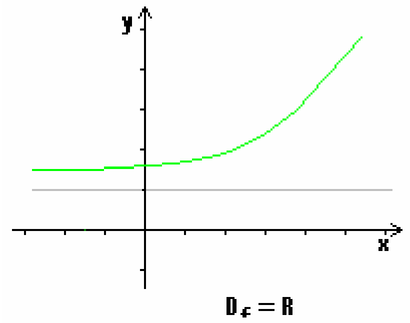
b.



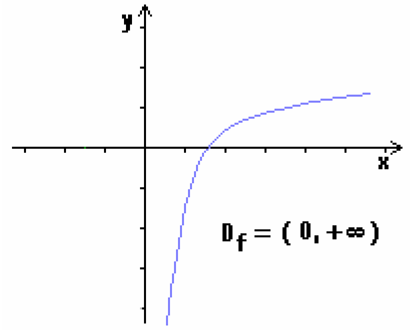
c.



d.



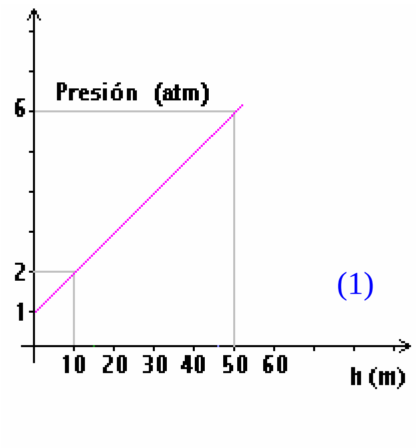
e.

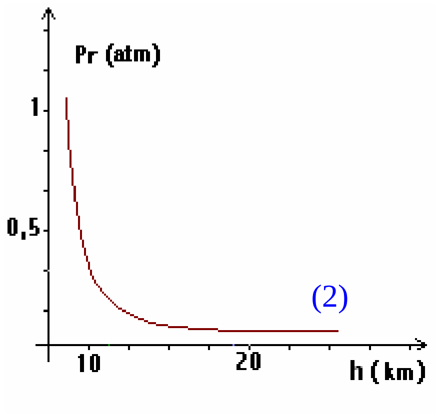


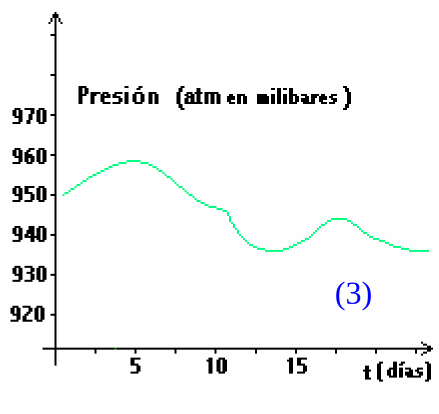
2.3.1 CARACTERÍSTICAS GLOBALES DE LAS GRÁFICAS

VARIACIONES DE UNA FUNCIÓN

Las siguientes gráficas muestran las variaciones de la presión atmosférica.





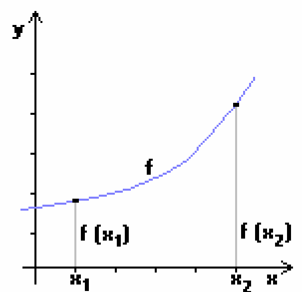
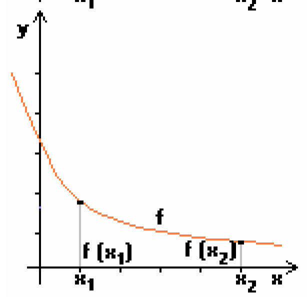


- En (1) se muestra cómo varía la presión al sumergirnos en el agua. Por cada *10m* que descendemos la presión **aumenta** una atmósfera (*1 atm*), luego la *p = f(h)* y es una función **creciente**.

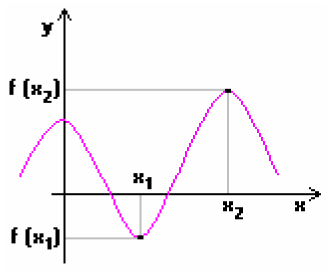
- En (2) se muestra la variación de la presión atmosférica con la altura, en principio disminuye más rápidamente, luego *p = f(h)* y es una función **decreciente**

- En (3) se muestra la variación de la presión atmosférica en un cierto lugar, durante un período de 20 días, *luego p = f(t)*
Presenta momentos donde **crece** y otros donde **decrece**, un valor **máximo**, el tercer día y otro **mínimo**, el día *10.*

2.3.2 FUNCIONES CRECIENTES Y/O DECRECIENTES

DEFINICIÓN	FORMA DE LA GRÁFICA
• *f* **crece** en un intervalo I si $f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ en I	
• *f* **decrece** en un intervalo *I* si $f(x_1) > f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ en I	

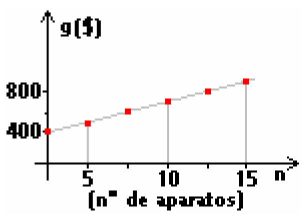
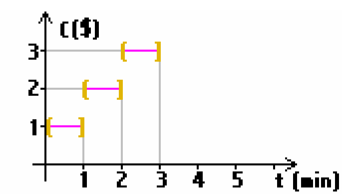
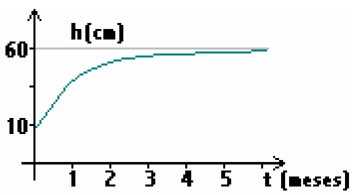
2.3.3 MÁXIMOS Y MÍNIMOS

DEFINICIÓN	FORMA DE LA GRÁFICA
• f alcanza un **mínimo local** en x_1 si $f(x_1) \leq f(x)$ para todos los valores de x “próximos” a x_1 • f alcanza un **máximo local** en x_2 si $f(x_2) \geq f(x)$ para todos los valores de x “próximos” a x_2	

Alrededor de un **mínimo** la función pasa de ***decreciente a creciente*** y alrededor de un **máximo** pasa de ***creciente a decreciente.***

2.3.4 CONTINUIDAD – DISCONTINUIDAD

Analicemos las siguientes gráficas, que representan las situaciones problemáticas planteadas.

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA	GRÁFICA	OBSERVACIÓN
1) Las ganancias mensuales de un representante de computadoras son de \$ 400 fijos, más \$ 20 por cada aparato que vende, entonces la ganancia depende del número de aparatos vendidos. $g = f(n)$		La variable independiente sólo tiene sentido para los valores 0, 1,2 3,… pues no se puede vender un número fraccionado de computadoras.
2) El costo de una llamada diurna de larga distancia es de \$ 0, 57 para el primer minuto y de \$ 0,56 por cada minuto adicional (o fracción de minuto), entonces el costo depende del tiempo. $C = f(t)$		La variable independiente “t” varía en intervalos regulares de 1 minuto.
3) La gráfica muestra el crecimiento de una planta con el paso del tiempo, la altura depende del tiempo**.** $h = f(t)$		La variación es suave, sin saltos bruscos.

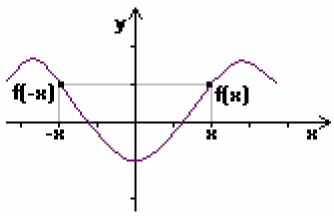
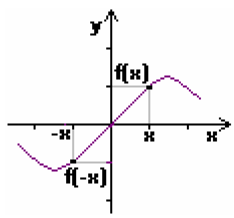
Estos ejemplos nos muestran que existen funciones discontinuas, como las que representan la primera y segunda situación problemática, o continuas, como la de la tercera.

- En la primera gráfica la variable independiente pasa de un valor a otro por saltos, la variable se llama **discreta** y la función no es una línea sino un conjunto de puntos..

- En la segunda gráfica, aunque la variable independiente es continua, la función presenta saltos, estos saltos son las discontinuidades de la función.

- En la tercera gráfica la función no presenta discontinuidades de ningún tipo.

2.3.5 FUNCIONES PARES E IMPARES

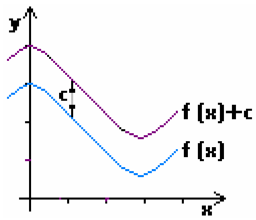
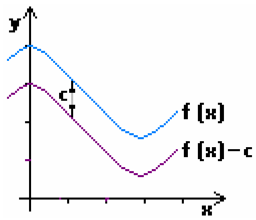
DEFINICIÓN	SIMETRÍA	FORMA DE LA GRÁFICA
• f **es <u>par</u> si** $f(x) = f(-x)$ $\forall\ x \in D_f$	La gráfica de la función es **simétrica respecto del eje y.**	
f **es <u>impar</u> si** $f(x) = - f(-x)$ $\forall\ x \in D_f$	**La gráfica de la función es simétrica respecto al origen.**	

2.3.6 TRANSFORMACIONES DE FUNCIONES

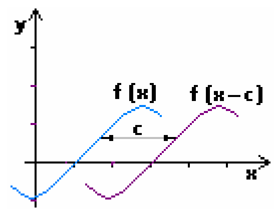
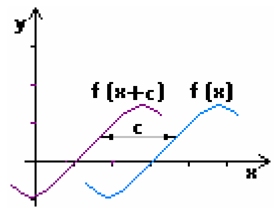
Si conocemos la gráfica de y = f(x) vamos a analizar cómo ciertas transformaciones modifican su gráfica, en particular, estudiamos

- **DESPLAZAMIENTOS** $\left\{ \begin{array}{l} \text{verticales} \\ \text{horizontales} \end{array} \right.$

- ***DESPLAZAMIENTO VERTICAL DE LAS GRÁFICAS.***

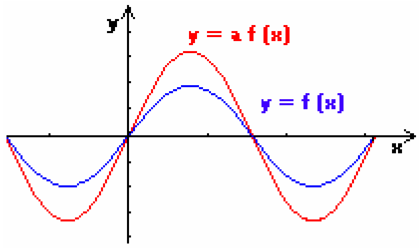
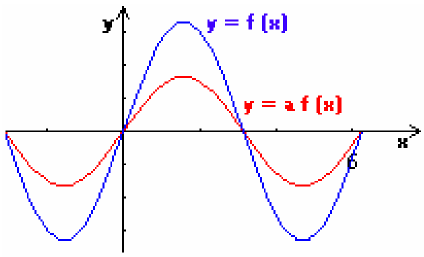
DEFINICIÓN	COMO OBTENER LA GRÁFICA	APARIENCIA DE LA GRÁFICA
$y = f(x) + c$ $(c>0)$	La gráfica se desplaza “c” unidadeshacia arriba	
$y = f(x) - c$ $(c>0)$	La gráfica se desplaza “c” unidades hacia abajo	

- ***DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL DE LAS GRÁFICAS.***

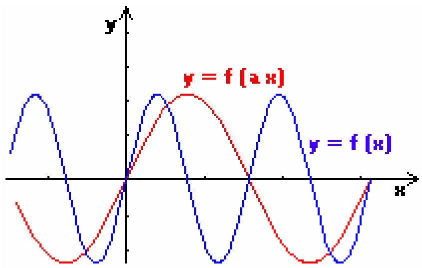
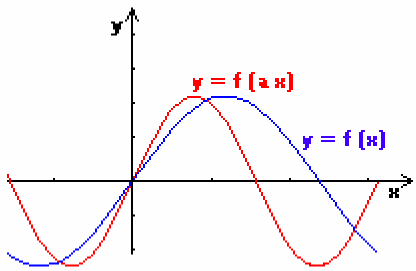
DEFINICIÓN	COMO OBTENER LA GRÁFICA	APARIENCIA DE LA GRÁFICA
$y=f(x-c)$	La gráfica se desplaza “c” unidades hacia la derecha	
$y = f(x+c)$	La gráfica se desplaza “c” unidades hacia la izquierda	

- **EXPANSIONES / COMPRESIONES** { verticales
horizontales

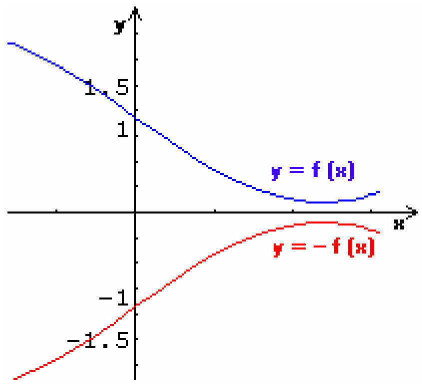
- *EXPANSIONES / COMPRESIONES VERTICALES*

DEFINICIÓN	COMO OBTENER LA GRÁFICA	APARIENCIA DE LA GRÁFICA
$y = a\ f(x)$ $a > 1$	La gráfica se expande verticalmente en un factor a "a"	
$y = a\ f(x)$ $0 < a < 1$	La gráfica se comprime verticalmente en factor igual a "a"	

- *EXPANSIONES / COMPRESIONES HORIZONTAL*

DEFINICIÓN	COMO OBTENER LA GRÁFICA	APARIENCIA DE LA GRÁFICA
$y = f(a\,x)$ $a > 1$	La gráfica se comprime horizontalmente.	
$y = f(a\,x)$ $0 < a < 1$	La gráfica se expande horizontalmente.	

- ***REFLEXIONES***

DEFINICIÓN	COMO OBTENER LA GRÁFICA	APARIENCIA DE LA GRÁFICA
$y = -f(x)$	La gráfica se refleja respecto del eje x	
$y = f(-x)$	La gráfica se refleja respecto del eje y