1.6.0 NÚMEROS REALES

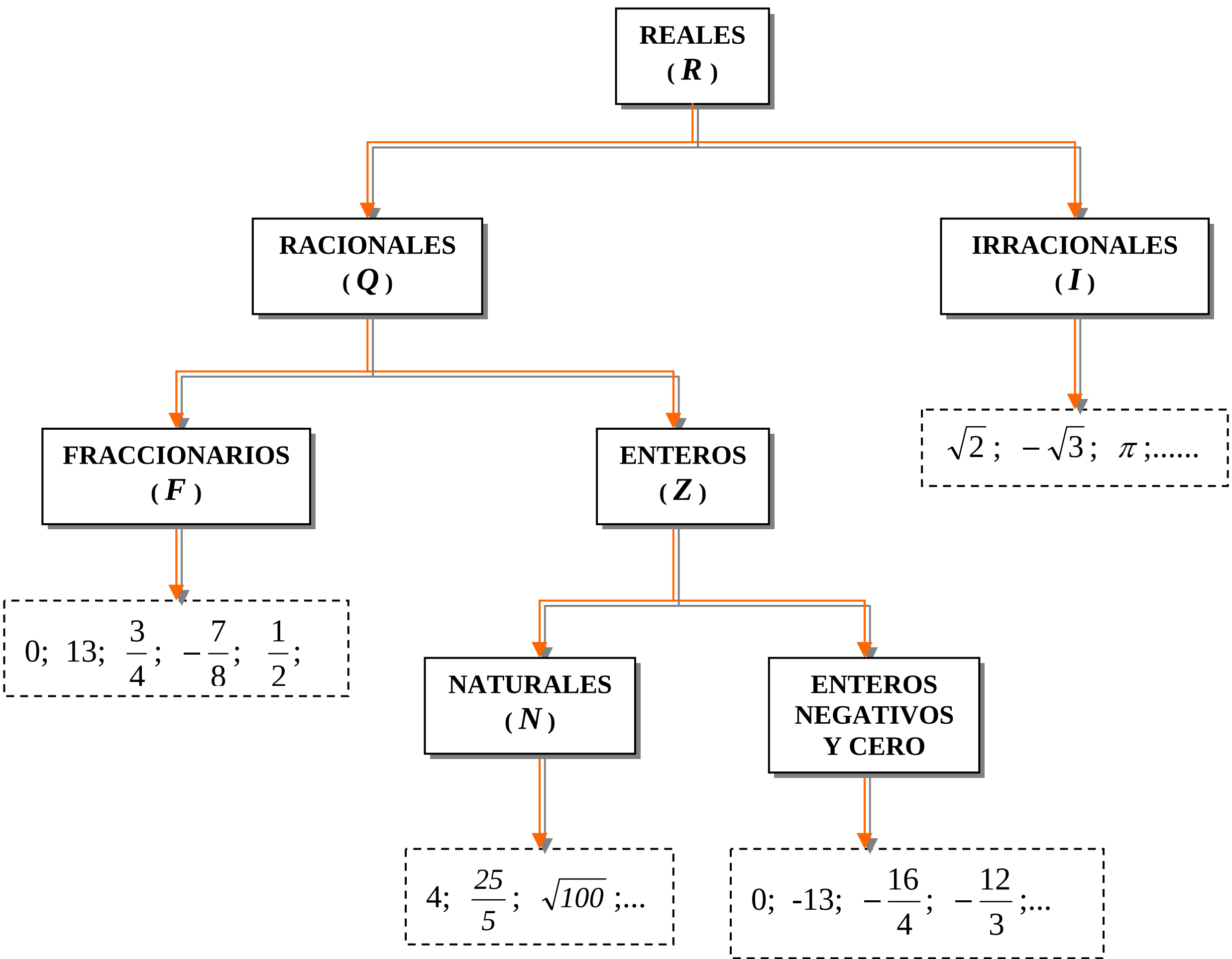
Los números racionales y los irracionales forman un nuevo conjunto llamado ***<u>números reales</u>*** que se representan por R.

Estos números completan la recta.

> ***Cada punto de la recta es gráfica de algún número real y cada número real es la coordenada de algún punto de la recta.***

Esta correspondencia es biunívoca, es decir, uno a uno.

El siguiente diagrama representa las sucesivas ampliaciones que realizamos del campo numérico.



1.6.1 OPERACIONES EN R – PROPIEDADES

En el conjunto de números reales podemos definir las operaciones de: adición, multiplicación, potenciación, radicación,...

Propiedad	Adición	Multiplicación
Ley de Cierre	$\forall a,b \in R \rightarrow a+b \in R$	$\forall a,b \in R \rightarrow a.b \in R$
Ley Uniforme	$\forall a,b,c \in R \;\; y \;\; a=b$ $\Rightarrow a+c=b+c$	$\forall a,b,c \in R \;\; y \;\; a=b$ $\Rightarrow a.c=b.c$
Ley Asociativa	$\forall a,b,c \in R$ $\Rightarrow (a+b)+c=a+(b+c)$	$\forall a,b,c \in R$ $\Rightarrow (a.b)c=a(b.c)$
Ley Conmutativa	$\forall a,b \in R$ $\Rightarrow a+b=b+a$	$\forall a,b \in R$ $\Rightarrow a.b=b.a$
Elemento neutro	$\exists\, 0 \in R \;\; /$ $a+0=0+a=a \quad \forall a \in R$	$\exists\, 1 \in R \;\; /$ $a.1=1.a=a \quad \forall a \in R$
Inverso	$\forall\; a \in R \;\; \exists\; b \in R \;\; /$ $a+b=b+a=0 \quad (b=-a)$	$\forall\; a \in R, a \neq 0 \;\; \exists\; b \in R \;\; /$ $a.b=b.a=1 \quad (b=a^{-1})$
Distributiva de la multiplicación respecto a la adición	$a(b+c)=a.b+a.c \quad \forall a,b,c \in R$	

POTENCIACIÓN

DEFINICIÓN

Sea $a \in R,\; n \in N$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \; veces}$$

$$a^0 = 1 \;\; si \;\; a \neq 0$$

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \;\; si \;\; a \neq 0$$

PROPIEDADES

Sean $n,m \in Z$

- $(a.b)^n = a^n b^n$
- $a^n a^m = a^{n+m}$
- $a^n : a^m = a^{n-m}$
- $(a^n)^m = a^{n.m}$

IDENTIDADES NOTABLES

Recordemos algunas identidades de uso frecuente en cálculos numéricos y algebraicos.

- $a(b+c)=ab+ac$ (Propiedad distributiva).
- $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ (Cuadrado de un binomio).
- $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ (Cuadrado de un binomio).
- $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ (Cubo de un binomio).
- $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ (Diferencia de cuadrados).

✍

a) $7a^2b^3-14ab^2+21a^2b=$

b) $(4-x)^2+(x-4)^4=$

c) $16-x^4=$

d) $x^2-3=$

e) $(x+3)^2+(x-4)^3+(x-4)(x+3)=$

RADICACIÓN

DEFINICIÓN

$\sqrt[n]{a}=b$ si y sólo si $a = b^n$, con $n\in N$

$\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$

- *Si a>0,* $\sqrt[n]{a}\ \exists$ *en* $R\ \forall\ n\in N$

☞ $\sqrt{7}\ ;\ \sqrt[4]{21}\ ;\ \sqrt[5]{0{,}789}$

- *Si a<0;.* $\sqrt[n]{a}\ \exists$ *en R* solo si n es impar

☞ $\sqrt[3]{-8}=-2\ ;\ \sqrt{-8}$ *no tiene solución en R*

PROPIEDADES

Sean $a,b\in R;\ n,m,p\in N$

- $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$
- $\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a/b}$ si $b\neq 0$
- $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n.p]{a^{m.p}}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[m\cdot n]{a}$

1.6.2 OPERACIONES CON RADICALES

➢ ***Adición y sustracción de radicales***

Solo es posible sumar o restar términos con radicales semejantes. Dos radicales son *semejantes* cuando tienen igual índice y el mismo radicando.

a) $2\sqrt{3}+\sqrt{3}-5\sqrt{3}=(2+1-5)\sqrt{3}=-2\sqrt{3}$

b) $4\sqrt{2}-2\sqrt{5}+3\sqrt{2}+6\sqrt{5}=(4+3)\sqrt{2}+(-2+6)\sqrt{5}=\sqrt{2}+4\sqrt{5}$

c) $3\sqrt{2}-5\sqrt{32}+7\sqrt{8}=3\sqrt{2}-5\sqrt{2^5}+7\sqrt{2^3}$

$$=3\sqrt{2}-5\sqrt{2^4}.\sqrt{2}+7\sqrt{2^2}.\sqrt{2}$$
$$=3\sqrt{2}-5.2^2\sqrt{2}+7.2\sqrt{2}$$
$$=3\sqrt{2}-20\sqrt{2}+14\sqrt{2}$$
$$=(3-20+14)\sqrt{2}=-3\sqrt{2}$$

➢ ***Multiplicación y división de radicales***

El producto o cociente de varios radicales es el radical que se obtiene al multiplicar o dividir radicales reducidos a común índice.

a) $\sqrt[5]{x^3}.\sqrt[5]{x}=\sqrt[5]{x^3.x}=\sqrt[5]{x^4}$

b) $\sqrt[5]{3}.\sqrt[4]{2}=\sqrt[20]{3^4}.\sqrt[20]{2^5}=\sqrt[20]{3^4.2^5}=\sqrt[20]{81.32}=\sqrt[20]{2592}$

c) $\dfrac{\sqrt[6]{4}}{\sqrt[4]{2}}=\dfrac{\sqrt[12]{\left(2^2\right)^2}}{\sqrt[12]{2^3}}=\sqrt[12]{\dfrac{2^4}{2^3}}=\sqrt[12]{2}$

1.6.3 RACIONALIZACIÓN DE DENOMINADORES

Dada una fracción en cuyo denominador aparece algún radical, se entiende por <u>racionalizar</u>, encontrar otra fracción igual a la dada y en cuyo denominador no figuren radicales.

☞

1) $\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

2) $\dfrac{3}{\sqrt[5]{64}}=\dfrac{3}{\sqrt[5]{2^6}}=\dfrac{3}{2\sqrt[5]{2}}=\dfrac{3\sqrt[5]{2^4}}{2\cdot\sqrt[5]{2}\cdot\sqrt[5]{2^4}}=\dfrac{3\sqrt[5]{16}}{2\sqrt[5]{2^5}}=\dfrac{3\sqrt[5]{16}}{4}$

3) $\dfrac{3}{3-\sqrt{3}}=\dfrac{3\left(3+\sqrt{3}\right)}{\left(3-\sqrt{3}\right)\left(3+\sqrt{3}\right)}=\dfrac{3\left(3+\sqrt{3}\right)}{3^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\dfrac{3\left(3+\sqrt{3}\right)}{9-3}=\dfrac{\overset{1}{\cancel{3}}\left(3+\sqrt{3}\right)}{\underset{2}{\cancel{6}}}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$

4) $\dfrac{-2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\dfrac{-2\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}=\dfrac{-2\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{3-2}=-2\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$

Gerolamo Cardano (1501-1576) es sin lugar a dudas uno de los personajes más singulares en la historia de las matemáticas. En su época fue el médico con mayor renombre en Europa y a pesar de ello sufrió toda su vida numerosas enfermedades, incluyendo fracturas, hemorroides y el terror irracional a encontrarse con perros rabiosos. Sus adorados hijos lo hicieron sufrir- su consentido finalmente fue decapitado por haber asesinado a su esposa. Cardano fue un jugador compulsivo pero aprovechó este vicio para escribir el *Baok on Games of Chance*, el primer estudio de las probabilidades desde un punto de vista matemático correcto.

Su obra matemática de mayor importancia fue el *Ars magna*, en el cual detalló la solución de las ecuaciones polinomiales generales de tercer y cuarto grado. En el momento de su publicación los matemáticos se sentían incómodos incluso con los números negativos pero las fórmulas de Cardano abrieron camino a. la aceptación no sólo de los números negativos sino también de los números imaginarios, ya que se presentan de manera natural en la resolución de las ecuaciones polinomiales. Por ejemplo, una de sus fórmulas da la solución

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}-\sqrt[3]{-2+\sqrt{-121}}$$

para la **ecuación cúbica**

$$x^3-15x-4=0$$

Este valor para x de hecho resulta ser el *entero* 4, aunque para determinarlo Cardano tuvo que utilizar el número imaginario $\sqrt{-121}=11i$