Un enunciado como: *"El número de alumnos de la clase de Análisis no supera los 50 alumnos"*, origina expresiones donde se utilizan los símbolos " > ", " < ", " ≥ ", " ≤ ".

En este caso lo expresamos: $x < 50$

Una inecuación es una propuesta de desigualdad.

Algunas propiedades de las desigualdades, necesarias para resolver las inecuaciones.

Sean a y b $\in$ R , con a < b se verifica:

(a) $a + k < b + k \quad \forall \; k \in R$

(b) $a \cdot k < b \cdot k$ si $k > 0$

(c) $a \cdot k > b \cdot k$ si $k < 0$

(d) $a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

Las relaciones numéricas que se expresan con los signos " < " y " > " se llaman desigualdades y las relaciones algebraicas correspondientes se llaman inecuaciones

Así: (*) $30 > \frac{5}{2}$; $-\frac{1}{2} < 0$ son desigualdades

(*) Las relaciones: $-3x + 2 < 50$; $4x - \frac{1}{2} \geq 0$ son inecuaciones

Así, por ejemplo, en: $-3x + 2 < 50$

$$-3x + 2 - 2 < 50 - 2$$

$$-3x < 48 \qquad \text{(se multiplica por: } -\frac{1}{3}\text{)}$$

$$x > -16$$

En cambio en: $4x - \frac{1}{2} \geq 0$

$$4x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$$

$$4x \geq \frac{1}{2} \qquad \text{(se multiplica por: } \frac{1}{4}\text{)}$$

$$x \geq \frac{1}{8}$$

Para resolver inecuaciones son válidos los mismos pasos que para resolver ecuaciones, la única diferencia es que, cuando una incógnita está multiplicada por un número negativo se invierte el sentido de la desigualdad.

1.9.5 INTERVALOS

Entre los conjuntos de números que usaremos con más frecuencia se encuentran los <u>intervalos.</u>

Consideremos dos números reales fijos **a** y **b**, con $a \leq b$, definimos los intervalos del siguiente modo:

	Notación de conjunto	Notación de intervalo
INTERVALO ABIERTO	$\{x \in R \,/\, a < x < b\}$	(a, b)
INTERVALO CERRADO	$\{x \in R \,/\, a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$
INTERVALO SEMI-ABIERTO	$\{x \in R \,/\, a < x \leq b\}$ $\{x \in R \,/\, a \leq x < b\}$	$(a, b]$ $[a, b)$
INTERVALOS INFINITOS	$\{x \in R \,/\, a < x\}$ $\{x \in R \,/\, a \leq x\}$ $\{x \in R \,/\, a > x\}$ $\{x \in R \,/\, a \geq x\}$ $\{x \,/\, x \in R\}$	$(a, +\infty)$ $[a, +\infty)$ $(-\infty, +a)$ $(-\infty, a]$ $(-\infty, +\infty)$

1.9.6 REPRESENTACIÓN GRAFICA DE INECUACIONES

Las soluciones de las inecuaciones, como vimos en los ejemplos, pueden ser de la forma : $x < a$; $x \leq a$; $x > a$; $x \geq a$ que en notación de intervalo se expresan, respectivamente, $(-\infty, a)$; $(-\infty, a]$; $(a, +\infty)$; $[a, +\infty)$ y gráficamente significan:

```
(- ∞ , a)     -/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-)----------------------->
                                           a
( - ∞ , a]    -/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-]---------------------- >
                                           a
(a , + ∞)     ---------------------------(-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/ >
                                           a
[a , + ∞)     ---------------------------[-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/ >
                                           a
```

1.9.7 SISTEMAS DE INECUACIONES

Calcular las soluciones comunes a dos o más inecuaciones es resolver el sistema de inecuaciones formado por ellas.

Las soluciones de los sistemas de inecuaciones pueden ser de la forma:

$$a < x < b \;;\; a \leq x < b \;;\; a < x \leq b \;;\; a \leq x \leq b$$

y se indican respectivamente por:

$$(a, b) \;;\; [a, b) \;;\; (a, b] \;;\; [a, b].$$

y representan, como ya definimos, <u>intervalos</u> en la recta real.

(1) Expresá en lenguaje simbólico las siguientes proposiciones:

(a) Si a un número se le restan dos unidades el resultado no es menor que cinco.
(b) Si al triplo de un número se le agregan cuatro unidades su resultado es a lo sumo 10.
(c) Si a un número se le suma su quinta parte el resultado es mayor o igual que su duplo aumentado en 3 unidades.
(d) El triplo de la diferencia de un número y 4 no es menor que -7.

Solución

(a) $x - 2 \geq 5$ (b) $3x + 4 \leq 10$

(c) $x + \frac{1}{5} x \geq 2x + 3$ (d) $3(x - 4) \geq -7$

(2) Resolvé y graficá, en *R*, la solución de las inecuaciones:

(a) $-5x + 2 \geq 2\left(x + \frac{1}{2}\right)$

(b) $3(x - 1) + 4 < -3x + 2$

(c) $2x + 1 < 2(4 + x)$

(d) $-3x - 5 \geq \frac{1}{2}(7 - 6x)$

(e) $\begin{cases} x + 3 < 0 \\ 5 - 2x \geq 1 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} 2x + 1 > 0 \\ 5 - x \geq 0 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} 3x - 6 > 0 \\ x + 1 \leq 0 \end{cases}$

(h) $(x - 1)(x + 2) \leq 0$

(i) $(x + 3)^2 (x - 1) > 0$

(j) $\frac{1}{x} < \frac{1}{3}$

(k) $\frac{1 + x}{2 - x} \geq 1$

Solución

(a) $-5x + 2 \geq 2\left(x + \frac{1}{2}\right)$

$-5x + 2 \geq 2x + 1$
$2 - 1 \geq 2x + 5x$
$1 \geq 7x \dashrightarrow x \leq \frac{1}{7}$

$S = \left(-\infty, \frac{1}{7}\right]$

-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-]---------------------- >
$\frac{1}{7}$

(b) $3(x - 1) + 4 < -3x + 2$

$3x - 3 + 4 < -3x + 2$
$3x + 3x < 2 - 1$
$6x < 1$

$x < \frac{1}{6}$

$S = \left(-\infty, \frac{1}{6}\right)$

-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-)---------------------- >

$\frac{1}{6}$

(c) *2x + 1 < 2 (4 + x)*

2x + 1 < 8 + 2 x

1< 8

S=R La desigualdad se cumple siempre.

-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-●-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/ >

(d) -3 x - 5 ≥ $\frac{1}{2}(7-6x)$

-3 x - 5 ≥ $\frac{7}{2}$ - 3 x

-5 ≥ $\frac{7}{2}$

S= ϕ La desigualdad no se cumple nunca.

(e) $\begin{cases} x+3<0 \\ 5-2x \geq 1 \end{cases}$

x + 3 < 0 ⇒ x < - 3 -/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-)----|-------------------------->

-3 0

5 - 2 x ≥ 1 ⇒ x ≤ 2 -/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/|-/-/-/-]------------------->

2

S = (- ∞ , - 3) -/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-)------------------------------ >

-3

(f) $\begin{cases} 2x+1>0 \\ 5-x \geq 0 \end{cases}$

2 x + 1 > 0 ⇒ x > - $\frac{1}{2}$ -------------------(-/-/-|-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/ >

-1/2

5 - x ≥ 0 ⇒ 5 ≥ x -/-]---------->

5

$S = \left(-\frac{1}{2}, 5\right]$ -------------------(-/-/-|-/-/-/-/-/-/-/]---------- >

-1/2 5

(g) $\begin{cases} 3x-6>0 \\ x+1 \leq 0 \end{cases}$

3 x - 6 > 0 ⇒ x > 2 ---------------------|--------(-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/- >

0 2

$x + 1 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad x \leq -1$

```
-/-/-/-/-/-/-/-/-]-----|----------------------------->
                 -1    0
```

$S = \phi$

(h) $(x - 1)(x + 2) \leq 0$

El signo del producto depende del signo de los factores. Los números 1 y -2 son los puntos donde los factores cambian de signo.

```
                      ---------------------------+++++++++++
signo (x - 1)         _______________|______|_____________
                                     0      1

                      --------++++++++++++++++++++++
signo (x + 2)         _____|__________|__________________
                           -2         0

signo (x - 1) (x + 2) +++++-------------------+++++++++++
                      _____|_______________|_____________
                           -2              1
```

La desigualdad se verifica para todo $x \in [-2, 1]$. La solución se expresa:

$S = [-2, 1]$

(i) $(x + 3)^2 (x - 1) > 0$

El factor $(x + 3)^2$ es siempre positivo. Para que el producto dado sea positivo debe verificarse que $(x - 1) > 0$, o sea, $x > 1$. Los puntos del intervalo $(1, +\infty)$ verifican la desigualdad

$S = (1, +\infty)$

(j) $\dfrac{x + 2}{1 - x} \leq 0$

Como en los ejemplos precedentes, el signo de este cociente depende del signo de los factores. Los números - 2 y 1 son los puntos donde los factores cambian de signo. Además, debemos tener en cuenta que $x \neq 1$ porque este valor anula el denominador.

```
                  ------------------+++++++++++++++
Signo (x+2)       __________________|______|_____________
                                   -2      0

Signo (1-x)       +++++++++++++++------------------
                  __________________|______|_____________
                                    0      1

Signo ((x+2)/(1-x)) ------------------+++++------------------
                  __________________|______|_____________
                                   -2      1
```

La desigualdad se verifica para todo $x \in (-\infty, -2] \cup (1, +\infty)$. La solución se expresa: $S = (-\infty, -2] \cup (1, +\infty)$

(k) $\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{3}$

Un método para resolver el problema consiste en transformar la expresión en un cociente para analizar su signo como en el ejemplo anterior.

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{3} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3-x}{3x} < 0$$

sig (3 - x)

```
+++++++++++++++-----------------------
_______________|_______________
               3
```

sig (3 x)

```
----------++++++++++++++++++++++
_________|_______________________
         0
```

sig $\left(\dfrac{3-x}{3x}\right)$

```
----------+++++++++---------------------
_________|___________|_______________
         0           3
```

S = (- ∞ , 0) ∪ (3, + ∞)

(k) $\dfrac{1+x}{2-x} \geq 1$

$$\frac{1+x}{2-x} - 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x-1}{2-x} \geq 0$$

sig (2x - 1)

```
------------------------------++++++++++
____________________|______|___________
                    0     ½
```

sig (2 - x)

```
++++++++++++++++++++++++++-----
____________________|______________|_____
                    0              2
```

sig $\left(\dfrac{2x-1}{2-x}\right)$

```
--------------------------------++++++++-----
____________________|______|__________|_____
                    0     ½           2
```

S = $\left[\dfrac{1}{2}, 2\right)$