SITUACIÓN PROBLEMÁTICA 1

Se sabe que cada 32 metros de profundidad bajo la tierra, la temperatura aumenta un grado. Si en la superficie la temperatura es de 10ºC.

a) Encontrá la fórmula que relaciona la profundidad con la temperatura.
b) Un agua termal que sale a 79ºC ¿De que profundidad proviene?.
c) Graficá.

SOLUCIÓN:

$$Llamamos\begin{cases} T = temperatura \\ h = profundidad \end{cases}$$

a) De acuerdo con los datos, sabemos que por cada *32* metros de profundidad, la temperatura aumenta un grado. Entonces:

$$\boxed{T = \frac{1}{32}h}$$

Como la temperatura *T* en la superficie es de *10ºC* la fórmula final es:

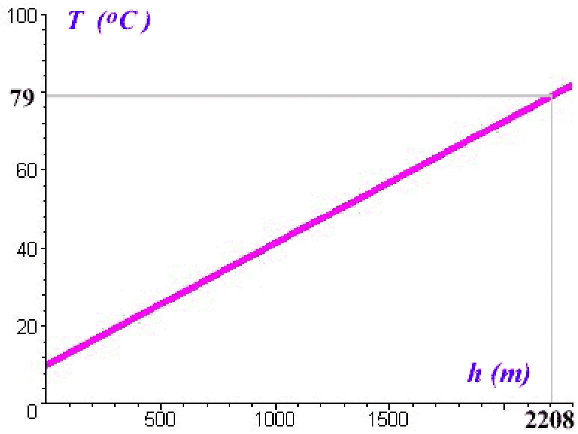
$$\boxed{T = 10 + \frac{1}{32}h}$$

b) Si *T* = *79 ºC* , ¿Cuál será el valor de *h*?

$$79 = 10 + \frac{1}{32}h \longrightarrow 69 = \frac{1}{32}h \rightarrow$$

$$h=2208 \text{ metros}$$

c) El aumento es uniforme, la gráfica de la función es una recta.



La función que utilizamos en el problema anterior es una función lineal y su fórmula es:

$$T(h) = 10 + \frac{1}{32}h$$

Entonces, una función lineal se expresa por la fórmula:

$$f(x) = ax + b \qquad con \quad a \; y \; b \; \in R.$$

Una función lineal es una función $f : R \rightarrow R$ ***de la forma:***
$f(x) = ax + b$ con a y b ∈ a R

El ***dominio*** de la función lineal es el conjunto de los números reales.

La ***gráfica*** de una función lineal es una recta del plano, y recíprocamente, toda recta del plano que ***no*** es perpendicular al eje *x*, es la gráfica de una función lineal.

Un punto $P_o(x_o, y_o)$ pertenece a la recta de ecuación $y = ax + b$ si y sólo si sus coordenadas verifican $y_o = ax_o + b$.

Así en la gráfica del problema anterior el punto *(2208 , 79)* pertenece a la recta porque verifica la ecuación dada.

En cambio el punto *(0 , 20)* no pertenece a la recta, reemplazándolo en la ecuación se obtiene:

$$T = 10 + \frac{1}{32}h \quad \rightarrow \quad 20 = 10 + \frac{1}{32} \cdot 0$$
$$\therefore 20 \neq 10$$

¿?

¿ Las rectas paralelas al eje *y*, son funciones lineales?.

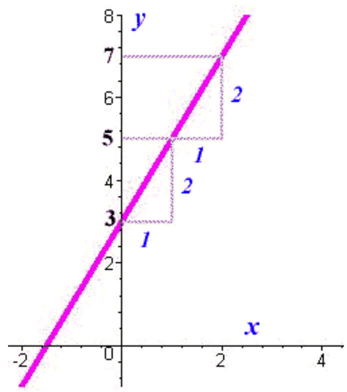
2.4.2 PENDIENTE Y ORDENADA EN EL ORIGEN

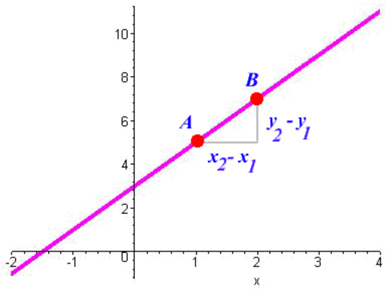
Consideremos la gráfica de $y = 2x + 3$.

En la figura marcamos los puntos *(0,3)*, *(1, 5)* ; *(2,7)*. Se puede observar que en todos los casos que:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 2$$

Siendo *2* el valor de *"a"* correspondiente a la recta.



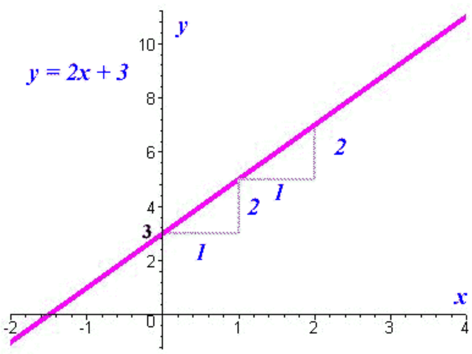


Al valor $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a$ *se lo llama* ***pendiente*** *de la recta e indica la inclinación de la recta respecto al eje x positivo.*

Gráficamente el valor de ***a*** indica lo siguiente:

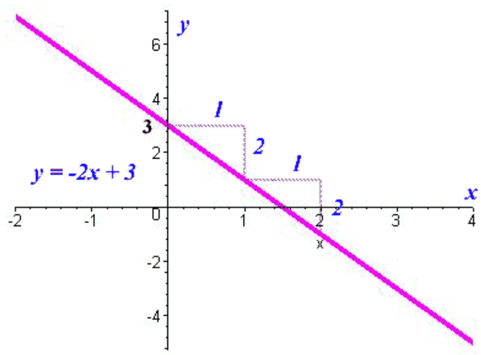
¿?

Si los valores de la ordenada son iguales por cada unidad que se desplaza, "x" hacia la derecha:



a = 2

Los valores de *y* varían dos unidades hacia arriba por cada unidad que aumenta *x*.



a = - 2

Los valores de *y* varían dos unidades hacia abajo por cada unidad que aumenta *x*.

Gráficamente "a" indica la cantidad de unidades que se desplaza la ordenada y (hacia arriba o hacia abajo) por cada unidad que se desplaza la abscisa x hacia la derecha.

La función definida por:

$$f(x) = ax + b \quad es \quad \begin{cases} creciente & si \quad a > 0 \\ decreciente & si \quad a < 0 \\ constante & si \quad a = 0 \end{cases}$$

- La recta de ecuación $f(x) = ax + b$ corta al eje y en y en el punto $(0\ ,b)$, es decir, $f(0) = b$, el coeficiente “ b” recibe el nombre de ***Ordenada en el origen.***

¿?

¿ Por qué es tan importante la función lineal?.

- Los valores de *a* y *b* se llaman ***parámetros*** y para cada recta tienen un valor determinado. Si variamos el valor de estos parámetros se obtienen las distintas rectas.

- Si *b=0*, las ecuaciones *y = a x* representan rectas que pasan por el origen de coordenadas. Estas funciones se llaman ***funciones de proporcionalidad.***

- Como $\frac{y}{x} = a$, esto indica que la relación entre *x* e *y* es ***constante***, es decir, *x* e *y* son ***proporcionales*** y el número *“a”* es la ***relación de proporcionalidad***.

2.4.3 FORMAS DE LA ECUACIÓN DE LA RECTA

No siempre se conocen la ***pendiente*** y la ***ordenada al origen***; los datos que se tienen pueden ser dos puntos, o un punto y la pendiente. Analizamos como se obtiene su ecuación en estos casos.

a.- SE CONOCEN DOS PUNTOS DE LA RECTA.

Consideremos la siguiente situación:

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA 1

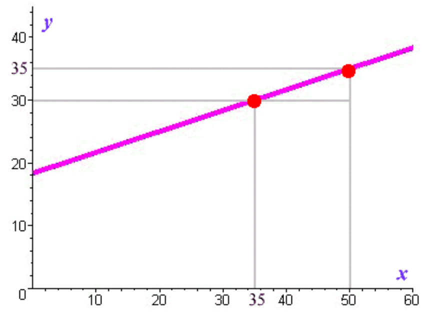
Un fabricante de zapatos coloca en el mercado 50 (miles de pares) cuando el precio es de $ 35 (pesos por par) y de 35 cuando cuestan $ 30.
Determiná la ecuación de la oferta suponiendo que el precio y la cantidad se relacionan linealmente.

SOLUCIÓN:

Asignamos nombres a los datos

Precio (y)	Cantidad (x)
$35	**50**
$30	**35**

De la gráfica correspondiente obtenemos:



$$a=\frac{y_1-y_o}{x_1-x_o} \qquad a=\frac{35-30}{50-35}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3} \qquad \boxed{a=\frac{1}{3}}$$

Luego $\quad y=ax+b \quad \rightarrow \quad y=\frac{1}{3}x+b$

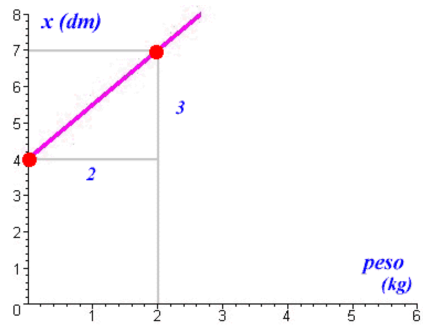
Calculamos "b" sustituyendo las coordenadas de un punto:

$(35\ ,30)\in recta \Rightarrow 30=\frac{1}{3}\cdot 35+b$ transponiendo los términos nos queda:

$$30-\frac{35}{3}=b \quad \Rightarrow \quad \frac{90-35}{3}=b \quad \Rightarrow \boxed{b=\frac{55}{3}}$$

La ecuación que rige la oferta será:

$$\boxed{y=\frac{1}{3}x+\frac{55}{3}}$$



b.- SE CONOCE LA PENDIENTE Y UN PUNTO DE LA RECTA

Consideremos la siguiente situación

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA 2

Un resorte que cuelga del techo, mide 4 dm. Si se cuelga un peso en su extremo libre, el resorte se estira proporcionalmente al peso aplicado. Si colgamos un peso de 2 kg, observamos que se estira 3 dm llegando a medir 7 dm.

Determiná la ecuación del alargamiento del resorte en función del peso colgado.

SOLUCIÓN:

Graficamos según los datos, y observamos que la pendiente es $a=\frac{3}{2}$, como la longitud inicial es de $4\ dm$, y conocemos el punto $(0\ \ ,4)$.

Luego expresamos: $y=ax+b$

Según los datos $y=\frac{3}{2}x+b \Rightarrow \ 4=\frac{3}{2}\cdot 0+b \quad \Rightarrow \quad \boxed{b=4}$

Luego:

$$\boxed{y=\frac{3}{2}x+4}$$

En general para calcular la ecuación de la recta que pasa por $P_o(x_o,y_o)$ y posee pendiente ***a***, se tiene:

Si $P_o(x_o,y_o)\in\ recta$

$\Rightarrow y_o=ax_o+b$

despejando el valor de "b"

$\Rightarrow b=y_o-ax_o$

$y=ax+y_o-ax_o\Rightarrow$

$y=a(x-x_o)+y_o$

c.- SE CONOCEN LOS PUNTOS DE INTERSECCIÓN CON LOS EJES COORDENADOS.

Consideremos la siguiente situación:

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA 3

*La demanda del mercado de un artículo que se vende a un precio **p** por unidad, está dado por la ecuación:*

$$\frac{p}{10}+\frac{q}{30}=1 \,.$$

1) Verificá que la expresión $q = f(p)$ es una función lineal.

2) Graficá e interpretá económicamente los resultados.

SOLUCIÓN:

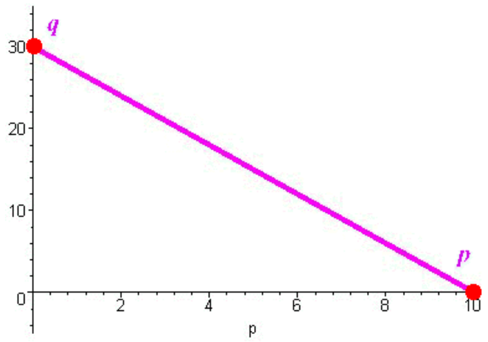
1) Despejando el valor de ***q*** se obtiene:

$$\frac{q}{30}=1-\frac{1}{10}p \Rightarrow \boxed{q=30-3p}$$

Luego la ecuación corresponde a una recta de *pendiente –3* y de *ordenada en el origen 30*.

El valor del precio más alto es *$10*, pero a ese precio nadie demanda el artículo.

La mayor cantidad de unidades demandas es *30*, pero es un valor ficticio ya que corresponde a un precio de *$ 0*, y el artículo no sale al mercado a ese precio.



A modo de síntesis

La ecuación de la recta que:

- pasa por los puntos $P(x_o,y_o)$ y $P(x_1,y_1)$ es:

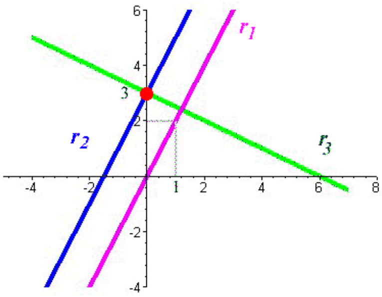
$$y=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}*(x-x_o)+y_o$$

- pasa por $P(x_o,y_o)$ y tiene pendiente ***a es:***

$$y=a(x-x_o)+y_o$$

- corta al eje *x* en ***a*** y al eje *y* en ***b*** es:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$



En la figura se puede observar que las rectas:

- r_1 y r_2 tienen igual inclinación, por lo tanto ***son paralelas***
- r_1 y r_3 , igual r_2 y r_3 que se cortan en ángulo recto, luego ***son pependiculares***

ECUACIÓN DE LAS RECTAS

- Las rectas r_1 y r_2 tienen igual pendiente $\boldsymbol{a = 2}$; además

  r_1 tiene ordenada en el origen igual a 0 → $\boxed{y = 2x}$

  r_2 tiene ordenada en el origen igual a 3 → $\boxed{y = 2x + 3}$

- La recta r_3 tiene pendiente de signo contrario a r_1 y r_2 y su valor es $a = -\frac{1}{2}$, como la ordenada en el origen es 3. Luego, la ecuación será

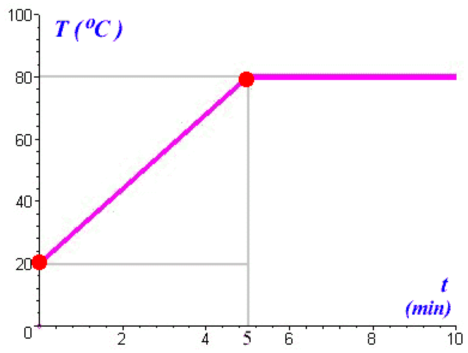
$$\boxed{y = -\frac{1}{2}x + 3}$$

En síntesis

Las rectas $y = a_1x + b_1$ ***y*** $y = a_2x + b_2$ ***son:***

- ***paralelas si*** $a_1 = a_2$
- ***perpendiculares***, si $a_1 = -\dfrac{1}{a_2}$

2.4.4 FUNCIONES LINEALES POR TRAMOS



Las siguientes situaciones describen fenómenos utilizando funciones lineales por tramos.

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA 1

*La gráfica muestra como evoluciona la temperatura **T** de un líquido con el paso del tiempo.*
Calculá la fórmula que representa la evolución de la temperatura en función del tiempo.

La parte de la gráfica que corresponde a $0 \le t \le 5$ es una recta con ordenada en el origen en *20* y la pendiente igual

$$a = \frac{80-20}{5-0} = \frac{60}{5} = 12$$

$$\therefore T(t) = 20 + 12t \qquad \text{si} \qquad 0 \le t \le 5$$

La parte de la gráfica que corresponde a $t>5$ es una recta horizontal de ecuación:

$$T(t)=80$$

Luego la fórmula de la función se expresa de la siguiente manera:

$$T(t) = \begin{cases} 20+12t & si \quad 0 \le t \le 5 \\ 80 & si \quad t > 5 \end{cases}$$

¿?

¿Cuánto vale $T(1)$; $T(3)$; $T(5)$; $T(7)$?

Para calcular $T(1)$ utilizaremos:
$T(t) = 20 + 12t$
porque $1 < 5$, luego
$T(1) = 20 + 12 = 32$.

Idem para calcular $T(3)$ y $T(5)$.
$T(3) = 20 + 12 \times 3$
$= 20 + 32 = 52$.
$T(5) = 20 + 12 \times 5$
$= 20 + 60 = 80$

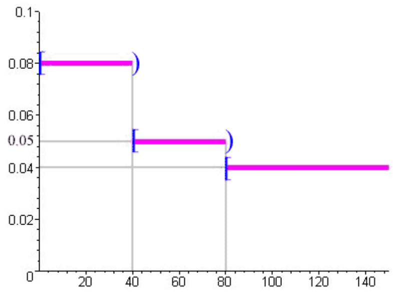
Para calcular $T(7)$ se utiliza $T(t)=80$ porque $7>5$, luego $T(7)=80$.

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA 2

En un negocio donde se hacen fotocopias, el precio por unidad depende del número de copias; hasta 40 copias el precio es de \$ 0,08 cada una; de 41 a 80 copias es de \$0,05 y mas de 80 copias es de \$0,04 cada una.

a.- Graficá la función que da el costo en función de la cantidad de copias.
b.- Escribí la expresión algebraica de la función.

a.-



b.-

$$C(x) = \begin{cases} 0{,}08 & si \quad 0 \le x < 40 \\ 0{,}05 & si \quad 41 \le x < 80 \\ 0{,}04 & si \quad x \ge 81 \end{cases}$$