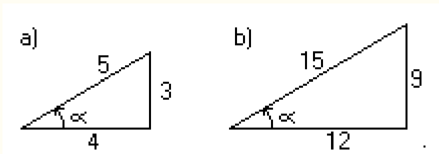
3.8.0

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Consideramos un triángulo rectángulo.que tiene α como uno de sus ángulos agudos Podemos definir relaciones entre sus lados del siguiente modo.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS	
$\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{cat.op.}{hip.}$	$\cos\alpha = \dfrac{cat.ady.}{hip.}$
$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{cat.op.}{cat.ady.}$	$\cot g\alpha = \dfrac{cat.ady.}{cat.op.}$
$\cos ec\alpha = \dfrac{hip.}{cat.op.}$	$\cos ec\alpha = \dfrac{hip.}{cat.ady.}$

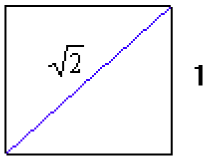


en a)
- sen α = 3/5
- cos α = 4/5

en b)
- sen α = 9/15 = 3/5
- cos α = 12/15 = 4/5

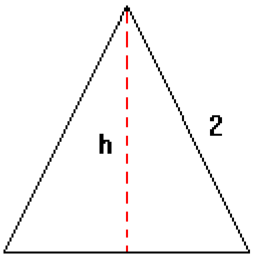
Los triángulos de la figura, para igual valor de α son semejantes, luego las razones son iguales independientemente del tamaño del triángulo, <u>sólo</u> dependen del <u>ángulo</u>

3.8.1 TRIÁNGULOS ESPECIALES



En algunos triángulos rectángulos se pueden calcular sus elementos con facilidad aplicando el teorema de Pitágoras.

- En un cuadrado de lado 1 se traza la diagonal y se obtiene un triángulo cuyos ángulos miden 45º, 45º y 90º y su hipotenusa $\sqrt{2}$.
- En un triángulo equilátero de lado 2 se traza la altura y se obtiene un triángulo cuyos ángulos miden 30º, 60º y 90º y sus lados 1, 2 y $\sqrt{3}$.



Con estos datos y las definiciones dadas es posible calcular las relaciones trigonométricas para ángulos de 30º, 45º y 60º

(o lo que es equivalente $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{\pi}{3}$).

Los valores están en la siguiente tabla, verificá los resultados.

α (grados)	**α (radianes)**	**Sen (α)**	**Cos (α)**	**Tg (α)**
0º	0	0	1	0
30º	π / 6	½	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45º	π / 4	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60º	π / 3	$\sqrt{3}/2$	1 / 2	$\sqrt{3}$
90º	π / 2	1	0	-

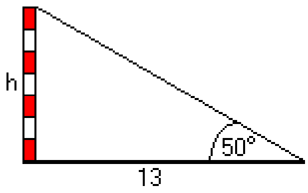
Para calcular los valores de las razones trigonométricas para otros ángulos utilizaremos la calculadora.

☞ Verificá si tu calculadora está en el modo correspondiente.

- **sin 2** indica el seno de un ángulo cuya medida es 2 radianes, se pasa la calculadora al modo en radianes (RAD) y se obtiene: sin 2 $\cong$ 0,9093
- Si se necesita calcular sin 2º , se pasa la calculadora al modo en grados (DEG) y se obtiene sin 2º $\cong$ 0,0349

3.8.2 RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Resolver trigonométricamente un triángulo rectángulo consiste en, dados dos de sus elementos, calcular los elementos restantes

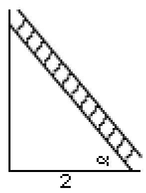


1) Calculá la altura de una torre si su sombra mide 13m cuando los rayos de sol forman un ángulo de 50º con la horizontal.

SOLUCIÓN:

- Dibujamos el triángulo asociado a los datos del problema.
- Identificamos la incógnita altura (h).
- Los datos son: el ángulo de 50º con la horizontal y la longitud de la sombra l = 13m.
- La razón trigonométrica que relaciona los datos y la incógnita es la

<u>tangente</u> : $\frac{h}{l}$ = tg 50º → h = 13m. tg 50º ≅ 15,5m

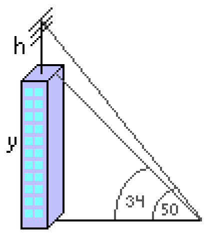


2) Una escalera de 4m está apoyada contra la pared. ¿Cuál es su inclinación si su base dista 2m de la pared?

SOLUCIÓN:

- Dibujamos el triángulo asociado a los datos del problema.
- La incógnita es el ángulo de inclinación α .
- Con los datos del problema, cateto adyacente e hipotenusa podemos calcular α aplicando la relación del <u>coseno</u>.

cos α = $\frac{cat.adyacente}{hipotenusa} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, aplicando la función inversa arco coseno obtenemos: $\hat{\alpha}$ = 60º



3) Una antena de televisión se instala sobre el techo de un edificio desde un punto que está al nivel del pie del edificio, a 75m de distancia, los ángulos de elevación de la base y del extremo superior de la antena miden 34º y 50º respectivamente. ¿ Cuál es la altura de la antena?.

SOLUCIÓN:

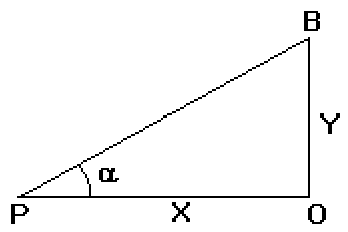
- Dibujamos un diagrama de la situación.
- La altura de la antena “ h “ la podemos calcular h = H – y
- Calculamos cada uno de estos valores

$\frac{H}{75}$ = tg 50º → H = 75.tg 50º ≅ 89,4m

$\frac{y}{75}$ = tg 34º → y = 75.tg 34º ≅ 50,6m

Luego la altura de la antena es

h = 89,4m – 50,6m = 38,8m ≅ 39m



Sea BOP un triángulo rectángulo con un ángulo agudo α , ubicamos el ángulo $\hat{\alpha}$ de modo que su lado inicial coincida con el eje x y el vértice con el origen de coordenadas. El punto P = P(x, y) es un punto del lado terminal.

En el triángulo BOP el cateto adyacente tiene una longitud x, el opuesto y, aplicando el teorema de Pitágoras calculamos la hipotenusa

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Entonces:

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{y}{r} \quad ; \quad \cos\ \alpha = \frac{x}{r} \quad ; \quad \text{tg}\ \alpha = \frac{y}{x}$$

Luego podemos ampliar la definición de las razones trigonométricas a cualquier tipo de ángulo.

- Sea α el ángulo tal que: P (x, y) está en el lado terminal y su distancia r al origen es 1.

Según la definición de las funciones trigonométricas del ángulo α, se tiene:

$$\boxed{\text{sen}\ \alpha = \frac{y}{1} = y \quad ; \quad \cos\ \alpha = \frac{x}{1} = x}$$

- Si P(x, y) es también el punto terminal de un arco de longitud t.

De acuerdo con la definición de las funciones trigonométricas del número real t se tiene:

$$\boxed{\text{sen}\ t = y \quad ; \quad \cos\ t = x}$$

- Si α se mide en radianes entonces: α = t

- Comparando las dos maneras de definir las funciones trigonométricas concluimos que dan <u>valores idénticos</u>