VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO REAL

El valor absoluto de un número real <u>a</u> se define como el número <u>no negativo</u>, que notamos $|a|$ ***. determinado por:.***

$$|a| = \begin{cases} a & si \quad a > 0 \\ 0 & si \quad a = 0 \\ -a & si \quad a < 0 \end{cases}$$

El valor absoluto es siempre un valor positivo.

☞ $|2| = 2$; $|-3| = 3$; $|\sqrt{2}| = \sqrt{2}$; $|0| = 0$

Enunciamos algunas propiedades :

Propiedad	Ejemplos
1 - $\lvert a\cdot b\rvert = \lvert a\rvert \cdot \lvert b\rvert$	$\lvert -3\cdot 7\rvert = \lvert -3\rvert \cdot \lvert 7\rvert = 21$
2 - $\lvert a+b\rvert \leq \lvert a\rvert + \lvert b\rvert$	$\lvert -8+3\rvert \leq \lvert -8\rvert + \lvert 3\rvert \Rightarrow > 5 \leq 11$
3 - $\left\lvert \frac{a}{b} \right\rvert = \frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}$	$\left\lvert \frac{8}{-2} \right\rvert = \frac{\lvert 8\rvert}{\lvert -2\rvert} = \frac{8}{2} = 4$
4 - $\lvert a-b\rvert = \lvert b-a\rvert$	$\lvert 3-5\rvert = \lvert 5-3\rvert$
5 - $\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert$	

Podemos asociar el valor absoluto de un número con el concepto geométrico de distancia.

Sean x e y números reales, se llama <u>distancia</u> entre x e y al número real | x-y |. Simbolizamos d (x , y) = | x – y |

Propiedades:

Para todo x , y , z ∈ R se verifica:

(a) d (x , y) ≥ 0 ;

(b) d (x , y) = 0 ⇔ x = y

(c) d (x , y) = d (y , x) ⇔ | x – y | = | y – x |

(d) d (x , y) ≤ d (x , z) + d (z , y) ⇔ | x – y | ≤ | x – z | + | z – y |

Expresá simbólicamente los siguientes enunciados:

(1) x está a más de 3 unidades de 7
$d(x, 7) = |x - 7| > 3$

(2) x no está a más de 5 unidades de 8
$d(x, 8) = |x - 8| < 5$

(3) x está a 4 unidades de –3
$d(x, -3) = |x + 3| = 4$

Relacioná cada conjunto de la columna de la izquierda con su expresión correspondiente de la columna de la derecha.

(1) El conjunto de los números reales cuya distancia a –3 es menor que 1.
(2) El conjunto de los números reales cuyo cuadrado es mayor que 4.
(3) El conjunto de los números reales cuya distancia a –4 es igual a su distancia a 3.
(4) El conjunto de los números reales cuya distancia al origen es mayor o igual a 3/2.
(5) El conjunto de los números reales cuya distancia a 7 es menor que 5.

(a) $|x| \geq 3/2$

(b) $|x - 7| < 5$

(c) $|x| > 2$

(d) $|x + 3| < 1$

(e) $|x + 4| = |x - 3|$

1.10.1 ECUACIONES E INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

Son relaciones algebraicas de uso frecuente, esencialmente en el análisis de funciones.
Analizaremos algunos ejemplos.

1 - Calculá, si existen, el o los valores de x que verifican las siguientes ecuaciones:

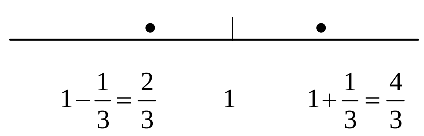
a) $|x - 3| = 0$

$$|x - 3| = 0 \rightarrow x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$$

b) $|2x - 6| = 0 \rightarrow 2x - 6 = 0 \rightarrow x = 3$

c) $|x - 1| = \frac{1}{3}$

$$|x - 1| = d(x, 1) = \frac{1}{3}$$



<u>Solución:</u> $\left\{ \frac{2}{3}, \frac{4}{3} \right\}$

d) $\left|5x-2\right|=\dfrac{1}{2}$

Solución: $\left|5x-2\right|=\left|5\cdot\left(x-\dfrac{2}{5}\right)\right|=\left|5\right|\cdot\left|x-\dfrac{2}{5}\right|=5\left|x-\dfrac{2}{5}\right|$

Por lo tanto: $\left|5x-3\right|=\dfrac{1}{2}$

$$5\left|x-\frac{2}{5}\right|=\frac{1}{2}\rightarrow\left|x-\frac{2}{5}\right|=\frac{1}{10}$$

$$d\left(x,\frac{2}{5}\right)=\frac{1}{10}$$

$$\frac{3}{10}\qquad\frac{2}{5}\qquad\frac{5}{10}$$

Solución: $\left\{\dfrac{3}{10},\dfrac{1}{2}\right\}$

e) $\left|4x+2\right|=3$

Solución $\left|4x+2\right|=\left|4\left(x+\dfrac{2}{4}\right)\right|=\left|4\right|\cdot\left|x+\dfrac{1}{2}\right|=4\left|x+\dfrac{1}{2}\right|=3$

luego $\left|x+\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{3}{4}$ o sea $d\left(x,-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{4}$

$$\left\{-\frac{5}{4},\frac{1}{4}\right\}$$

$$-\frac{5}{4}\qquad-\frac{1}{2}\qquad\frac{1}{4}$$

☞ 2- Calculá, si existe, la solución de las inecuaciones :

a) $\left|x\right|<2$

$\left|x\right|=\left|x-0\right|=d\left(x,0\right)<2$

--------(-/-/-/-/-/-|-/-/-/-/-/-)---------

-2 0 2

Solución: (-2 , 2)

b) $\left|x-3\right|<2$

$\left|x-3\right|=d\left(x,3\right)<2$

---------(-/-/-/-/-/-/-/-|-/-/-/-/-/-/-/-)--------

1 3 5

Solución: (1 , 5)

c) $|2x-3| \leq \frac{1}{2}$

$$|2x-3| = \left|2\left(x-\frac{3}{2}\right)\right| = 2\left|x-\frac{3}{2}\right| \leq \frac{1}{2}$$

luego $\left|x-\frac{3}{2}\right| \leq \frac{1}{4}$ o sea $d\left(x\,,\frac{3}{2}\right) \leq \frac{1}{4}$

Solución: $\left[\frac{5}{4}\,,\frac{7}{4}\right]$

```
-------[-/-/-/-/-/-/-/-/-|-/-/-/-/-/-/-/-/-]----------
```

$\frac{5}{4}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{7}{4}$

d) $|-2x+3| > 2$

$$|-2\,x+3| = \left|-2\left(x-\frac{3}{2}\right)\right| = |-2| \cdot \left|x-\frac{3}{2}\right| = 2\left|x-\frac{3}{2}\right| > 2$$

luego $\left|x-\frac{3}{2}\right| > 1$

o sea $d\left(x\,,\frac{3}{2}\right) > 1$

```
-/-/-/-/-/-/-)---------|---------(-/-/-/-/-/-/-
```

$\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{5}{2}$

Solución: $\left(-\infty\,,\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2}\,,+\infty\right)$