3.10.0 ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Una ecuación trigonométrica es aquella que contiene funciones trigonométricas.

Así por ejemplo:

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad ; \qquad 2\cos x - 1 = 0$$

son ecuaciones trigonométricas. La primera es una identidad, es decir, se verifica para todo valor de la variable x. La segunda solo se verifica para ciertos valores de x.

En general, si una ecuación trigonométrica tiene una solución entonces tiene una cantidad infinita de soluciones. ¿Por qué?

Para calcular todas las soluciones de la ecuación sólo se necesitan determinar las soluciones en el intervalo adecuado y después usar la propiedad de la periodicidad de las funciones trigonométricas.

Resolvemos la ecuación anterior:

$$2.\cos x - 1 = 0$$
$$2.\cos x = 1$$
$$\cos x = \tfrac{1}{2}$$

En el intervalo $[0, 2\pi)$ la función coseno es positiva si x pertenece al primero y al cuarto cuadrante, luego los valores que cumplen con la ecuación son:

$$x_1 = \frac{\pi}{3} \qquad \text{y} \qquad x_2 = \frac{5\pi}{3}$$

Pero como la función es periódica y su período es 2π a esos valores se obtiene otra solución. Por lo tanto, todas las soluciones de la ecuación tienen la forma:

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \qquad \text{y} \qquad x_2 = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \qquad , \kappa \in Z$$

MÁS EJEMPLOS

☞ **1)** Calculá las soluciones de la ecuación 2.sen x .cos x + cos x = 0 si $0 \leq x < 2\pi$

SOLUCIÓN:

En este caso nos piden las soluciones en un intervalo dado.

2.sen x .cos x + cos x = 0
cos x . [2. sen x + 1] = 0 → factor común

Si el producto es nulo entonces se verifica:

cos x = 0 (1) o 2.sen x + 1 = 0 (2)

(1) cos x = 0 en $[0, 2\pi)$ si $x = \frac{\pi}{2}$ o $x = \frac{3\pi}{2}$

(2) 2.sen x + 1 = 0

2.sen x = -1

$\text{sen } x = -\frac{1}{2}$

En el intervalo $[0, 2\pi)$ la función seno es negativa si x está en el tercer o cuarto cuadrante, luego el valor que corresponde es $x = \frac{7\pi}{6}$ o $x = \frac{11\pi}{6}$

El conjunto solución es:

$$S = \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}$$

2) Calculá las soluciones de $\cos^2 x = ½$ si $0 \leq x < 2\pi$

SOLUCIÓN: $\cos^2 x = ½$

- Aplicamos $\sqrt{}$

$$\sqrt{\cos^2 x} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$|\cos x| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Las soluciones correspondientes son:

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{4} \quad ; \quad x = 7\frac{\pi}{4}$$

y

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{4} \quad ; \quad x = 5\frac{\pi}{4}$$

El conjunto solución es; $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$

3) Calculá <u>todas</u> las soluciones de la ecuación $\text{sen}^2 x + \text{sen } x - 2 = 0$

SOLUCIÓN:

Aplicamos la fórmula para resolver una ecuación de segundo grado:

$$\text{sen } x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

De aquí obtenemos:

- sen x = 1 (1)
- sen x = -2 (2)

- La ecuación sen x = 1 se verifica si $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ con $k \in Z$
- La ecuación sen x = -2 <u>no</u> tiene solución, porque la función seno tiene imagen entre –1 y 1.

Luego el conjunto solución es:

$$s = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z\right\}$$

4) Calculá la solución de la ecuación 3cos x = 2 sen² x si $x \in [0, 2\pi)$

SOLUCIÓN:

Si usamos la identidad pitagórica: sen² x = 1 – cos² x, obtenemos una ecuación equivalente donde solo interviene la función seno.

3cos x = 2sen²x	. Original
3cos x = 2.(1 – cos² x)	.Identidad
3cos x – 2 + 2cos² x = 0	.Transposición de términos
2cos² x + 3cos x – 2 = 0	.Ordenamos

Aplicamos la fórmula para resolver una ecuación de segundo grado:

$$\cos x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(2)(-2)}}{2.2} = \frac{-3 \pm 5}{4} = \begin{array}{l} \frac{1}{2} \\ -2 \end{array}$$

- La ecuación cos x = ½ se verifica si $x = \frac{\pi}{3}$ o $x = 5.\frac{\pi}{3}$
- La ecuación cos x = -2 no tiene solución porque la función coseno tiene imagen entre –1 y 1 luego el conjunto solución es:

$$S = \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\}$$